ACTA DIDACTICA Vol. 9.

Probleme pentru pregătirea didactică matematică în învăţământul primar

Ghid pentru studenţi

Ioana Magdaş

Presa Universitară Clujeană

Ioana Magdaș

Probleme pentru pregătirea didactică matematică în învățământul primar

Ghid pentru studenți

Presa Universitară Clujeană

2017

Referenţi ştiinţifici:

Conf. univ. dr. Dumitru Vălcan

Conf. univ. dr. Zsoldos-Marchiș Iuliana

ISBN 978-606-37-0280-8

© 2017 Autoarea volumului. Toate drepturile rezervate. Reproducerea integrală sau parţială a textului, prin orice mijloace, fără acordul autoarei, este interzisă şi se pedepseşte conform legii.

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruţa Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro/

CUPRINS

Introducere

În pregătirea didactică matematică a oricărui cadru didactic pentru învăţământul primar problematica rezolvării de probleme este una fundamentală. Prin această lucrare ne-am propus să realizăm o sistematizare a acestei problematici, să clarificăm anumite aspecte teoretice, să prezentăm cele mai relevante tipuri de probleme și să indicăm modele de rezolvare. Realizată ca un ghid didactic de rezolvare de probleme care va fi parcurs la seminarul de *Metodica predării Matematicii* dar și prin studiu individual de către studenţii specializării *Pedagogia învăţământului primar și preșcolar*, lucrarea vine în completarea cărţii de *Didactica matematicii pentru învăţământul primar și preșcolar* - ediţia a II-a (2014).

În structurarea lucrării am pornit de la considerentul că nu se poate aborda problematica rezolvării problemelor de aritmetică fără a fi familiarizat cu rezolvarea exerciţiilor și problemelor ce vizează conţinuturi noţionale specifice învăţământului primar. Ca urmare în primul capitol am propus pentru rezolvare exerciţii și probleme cu: numere naturale și operaţii cu acestea, fracţii și operaţii cu ele, mărimi și unităţi de măsură și probleme cu conţinut geometric.

Cel de al doilea capitol tratează problemele logico-matematice, care deși nu sunt axate pe conţinuturi matematice specifice dezvoltă gândirea matematică în special dar și modul de gândire în general.

Cel de al treilea capitol este centrat pe metodele de rezolvare a problemelor de aritmetică. Anumite metode, ca de exemplu metoda reducerii la același termen de comparaţie sau metoda falsei ipoteze, deși nu apar explicit în programele școlare actuale pot fi subsumate unor alte metode sau combinate cu acestea, fiind totodată tipuri de probleme fară de care pregătirea didactică e incompletă.

Metodologia rezolvării exerciţiilor și problemelor de aritmetică a fost abordată abia în cel de al patrulea și ultim capitol al lucrării tocmai din considerentul promovării învăţării implicite şi al reflecţiei critice: pentru a putea prelucra didactic un anumit conţinut, în cazul nostru rezolvările de exerciţii și probleme, mai întâi trebuie să fii

familiarizat cu rezolvările propriu zise. Divizat în mai multe paragrafe rolul acestui capitol este acela de a-l face pe rezolvitor să reflecteze asupra demersului didactic de rezolvare a problemelor.

În fiecare paragraf al lucrării problemele propuse se succed de la simplu spre dificil, de la probleme tipice spre probleme atipice, iar acolo unde am considerat necesar am intervenit cu aspecte teoretice, pentru o mai bună fixare și înţelegere a problematicii. Problemele propuse trebuie rezolvate în succesiunea în care apar, iar acolo unde este prezentă și partea teoretică, numai după atenta parcurgere a acesteia. În cea mai mare parte problemele corespund programelor școlare în vigoare, cu mici extinderi spre performanţă prin propunerea de probleme date la concursurile elevilor. Nu avem pretenţia că am epuizat varietatea de probleme cu care se pot confrunta viitorii învăţători în activitatea la catedră, dar pentru fiecare tip de probleme am făcut o selecţie reprezentativă. Recomandăm cititorului să nu se limiteze la a rezolva doar problemele propuse în acest ghid ci pentru a-şi aprofunda cunoştinţele să studieze şi problemele propuse în alte culegeri, la diferitele concursuri școlare și la testările naţionale.

Concluzionând, considerăm că această carte vine să îmbogăţească perspectiva asupra lucrărilor de acest gen. Elementele de noutate pe care această lucrare le introduce privesc modul de selectare a tematicii, structurată și abordată astfel încât cititorul (rezolvitorul de probleme) să-și formeze o viziune de ansamblu asupra problematicii rezolvării de probleme în învăţământul primar, necesară pregătirii didactice. Deși ghidul se adresează cu precădere studenţilor specializării Pedagogia Învăţământului Primar și Preșcolar ea reprezintă o lucrare valoroasă şi pentru celelalte cadre didactice pentru învăţământul primar aflate în diferite etape ale carierei didactice care vor (re)găsi cu siguranţă în lucrare elemente de interes și utile în activitatea lor didactică.

Cluj-Napoca, martie 2018 — Autoarea

1. Probleme ce vizează conţinuturi noţionale matematice

1.1. Probleme cu numere naturale și operaţii cu numere naturale

✎ Probleme propuse:

1. Scrieţi cu cifre numerele: două sute de mii patrusprezece, cincisprezece mii treizeci şi opt.

2. a) În numărul 1684:
   1 reprezintă cifra... şi are valoarea...
   6 reprezintă cifra... şi are valoarea...
   8 reprezintă cifra... şi are valoarea...
   4 reprezintă cifra cifra... şi are valoarea...
   b) Scrieţi numărul 1684 descompus ca sumă de mii, sute, zeci şi unităţi.
   c) Vecinii numărului 1684 sunt:
   d) Predecesorul numărului 1684 este... iar succesorul său este....
   e) Rotunjiţi, aproximaţi prin lipsă și adaos pe rând numărul 1684 la: zeci, sute, mii.

3. Dintre numerele 1684 şi 1864 mai mare este ...pentru că ....

4. Ordonaţi crescător numerele: 1684, 2047, 163, 1640, 6145, 108, 18. Apoi subliniaţi cu o linie numere pare, și cu două linii numerele impare.

5. Scrie numărul a cărui descompunere în sumă de produse este: $23 \times 10000 + 32 \times 10$.

6. Se scriu numerele consecutive de la 14 la 23 unul după altul, obţinându-se astfel un alt număr. Care este cifra zecilor de mii a numărului obţinut?
   a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.
   (Concursul *Lumina Math*, 2008, cl. a IV-a)

7. Scrieţi numerele din 2 în 2 începând cu 17. Al şaptelea număr aflat după numărul dinaintea lui 31 este egal cu…
(Concursul *Evaluarea în educaţie*, 2009, cls. a III-a)

8. Scrieţi cel mai mic, respectiv cel mai mare număr de două cifre care au diferenţa cifrelor 3.

9. Scrieţi:
   a) Cel mai mare, respectiv cel mai mic număr par de trei cifre.
   b) Cel mai mare, respectiv cel mai mic număr par de trei cifre având toate cifrele diferite.
   c) Cel mai mare, respectiv cel mai mic număr de trei cifre care se poate forma cu cifrele: 0, 2 și 5.
   d) Cel mai mare, respectiv cel mai mic număr având toate cifrele diferite care se poate forma cu cifrele: 0, 2, 3, 5.
   e) Toate numerele de trei cifre având toate cifrele diferite care se pot forma cu cifrele: 0, 2, 3, 5.

10. Câte cifre de 3 se folosesc în scrierea numerelor de la 1 la 50?

11. Găsiţi cel mai mare număr natural de trei cifre care are o cifră egală cu diferenţa celorlalte două cifre în cazurile:
    a) numărul poate avea cifre egale;
    b) cifrele numărului sunt diferite.

12. Un număr scris cu trei cifre are suma cifrelor 27. Care este suma cifrelor succesorului său? Dar a predecesorului?

13. Câte numere naturale de trei cifre diferite au suma cifrelor egală cu 5?
    a) 5; b) 10; c) 6; d) 8; e) 12
    (Concursul *Lumina Math*, 2008, cl. a IV-a)

14. Gregor formează două numere de 3 cifre cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5 și 6 folosind fiecare cifră o singură dată. El adună apoi numerele obţinute. Care este suma maximă pe care Gregor o poate obţine?
    a) 975; b) 999; c) 1083; d) 1173 ; e) 1839.
    (Concursul *Cangurul*, 2012)

15. Calculaţi:

a) $284 - 96 - 39 =$
b) $198 - 193 + 2 =$
c) $198 + 193 - 2 =$
d) $2018 - 1989 + 11 =$
e) $2001 - 889 - 11 =$
f) $3468: 17 =$
g) $38114: 19 =$
h) $54 - 8: 2 \times 5 =$
i) $54 - 8 \times 10: 5 =$
j) $52 + 82 \times 5 =$
k) $201 \times 1007 - 1007 \times 201 =$
l) $99 + 99 \times 99 =$
m) $987 + 2 \times 987 + 3 \times 987 =$
n) $(22 - 22: 22) \times (1990 - 1) =$
o) $1 + 2 \times [3 + 4 \times (2 + 303: 3 - 204: 2)] =$
p) $2 + 2 \times [15 + 3 \times (112 + 112: 2 - 219: 3)] =$
q) $2 \times [92 + 8 \times (1004 - 4 \times (8: 2 \times 2 - 4 \times 2: 2)]\} =$
r) $9500 - \{250: 5 + 15: 3 \times [265 - (50: 25 + 2) \times 65] \times 150\} =$
s) Puneţi o paranteză pentru a obţine rezultatul dat:
$8 \times 8 - 8: 8 = 0$
t) Puneţi o paranteză pentru a obţine rezultatul dat:
$6 + 6 \times 6 : 6 = 7$

16. Aflaţi descăzutul ştiind că scăzătorul este 29, iar diferenţa este 89.

17. Aflaţi scăzătorul ştiind că descăzutul este 123 iar diferenţa este 89.

18. Suma a cinci numere consecutive este 145. Să se determine numerele.

19. Simona a avut de rezolvat exerciţiul: 37 – 10 +2. Din neatenţie a înlocuit semnul minus cu semnul plus obţinând astfel un rezultat mai mare cu… decât cel corect.
(Concursul *Evaluarea în educaţie*, 2009, cls. a III-a)

20. Cu cât trebuie mărită diferenţa dintre cel mai mare număr natural de trei cifre şi cel mai mic număr natural impar de două cifre diferite dacă vrem să obţinem predecesorul numărului 990?
(Concursul *Evaluarea în educaţie*, 2009, cls. a III-a)

21. Într-o pungă sunt bile albe, galbene şi roşii, numărul lor fiind egal cu cel mai mare numar natural de trei cifre, care are suma cifrelor 4. Se știe că 284 dintre bile nu sunt galbene, iar cele roșii sunt cu 72 mai multe decât numărul bilelor galbene. Câte bile sunt de fiecare culoare?
(Concursul *Evaluarea în educaţie*, 2008, cls. a III-a)

22. Un elev scrie în ordine crescătoare numerele naturale de la 1 la 20 inclusiv, iar între oricare două numere alăturate pune semnul +. Apoi observă că dacă în locul unui semn + pune semnul egal, se stabileşte o egalitate adevărată. Între ce numere a pus elevul semnul egal?
(Concursul *Evaluarea în educaţie*, 2011, cls. a III-a)

23. Determinaţi câtul şi restul împărţirii numerelor şi efectuaţi proba:
a) 756 şi 8; b) 4851 şi 23; c) 72512 şi 800.

24. Aflaţi împărţitorul dacă deîmpărţitul este 2848, câtul 21 iar restul 13.

25. Aflaţi deîmpărţitul dacă împărţitorul este 13, câtul 78, iar restul 10.

26. Ce resturi se pot obţine la împărţirea cu 3? Dar la împărţirea cu 7?

27. Aflaţi toate numerele care împărţite la 13 dau câtul 7 și apoi aflaţi suma lor.

28. Împărţind un număr natural nenul la 9 obţinem câtul egal cu restul. Aflaţi numărul. (Daţi toate soluţiile)

29. Să se afle cel mai mic număr natural de două cifre care împărţit la un număr de o cifră dă restul 7.

30. Să se afle cel mai mare număr natural de două cifre care împărţit la un număr de o cifră dă restul 8.

31. Să se afle cel mai mic număr natural de trei cifre care împărţit la un număr de o cifră dă restul 7.

32. Să se afle toate numerele naturale nenule care împărţite la 9 dau restul cu 1 mai mic decât câtul.

33. La o împărţire a unui număr natural la 4, câtul este egal cu restul. Să se afle ceilalţi termeni ai împărţirii. Câte soluţii are problema?

34. Calculaţi (mai rapid) folosind proprietăţile operaţiilor cu numere naturale:
    a) $2018 - 489 =$
    b) $725 + 726 + 727 - 425 - 426 - 427 =$
    c) $2 + 3 + \cdots + 2018 - 1 - 2 - \cdots - 2017 =$
    d) $3 + 5 + \cdots + 2011 - 2 - 4 - 6 - \cdots - 2010 =$
    e) $2013 \times 1007 - 1007 \times 2011 =$
    f) $2013 \times 108 - 108 \times 2012 =$
    g) $99 \times 980 + 210 \times 98 - 110 \times 980 =$
    h) $999 + 999 \times 999 =$
    i) $2018 + 2 \times 2018 + 3 \times 2018 + 4 \times 2018 =$
    j) $2017 + 2017 \times 2018 - 2019 \times 2018 =$

🕮 **Aspecte teoretice:**

Pentru a afla *câte numere sunt de la m (până) la n* vom analiza șirul numerelor naturale de la *1* la *m*:

$$\overbrace{\underbrace{1,\ \ 2,\ \ \ldots,\ \ m-1}_{\text{sunt } m-1 \text{ numere}},\ \ m,\ \ \ldots,\ \ n}^{\text{sunt } n \text{ numere}}$$

Așadar de la *m* la *n* sunt: *n - (m - 1)*, sau altfel scris: *n - m + 1*.

☑ **Exemplu:** De la 17 la 54 sunt: 54 -16 numere = 38 numere.

✋**Atenţie!**

- Pentru numerele *de la m (până) la n* se iau în considerare și numerele *m* și *n*.
- Pentru numerele *dintre (între) m și n* nu se iau în considerare numerele *m* și *n*.

35. Aflaţi:
    a) Câte numere de două cifre sunt?
    b) Câte numere de trei cifre sunt?
    c) Câte numere sunt de la 1000 la 1268?
    d) Câte numere sunt între 100 și 1000?
    e) Câte numere sunt de la 111 până la 999?

36. Calculaţi suma primelor 99 de numere naturale nenule:

    $1 + 2 + 3 + \cdots + 99$

☞**Rezolvare:**

Metoda 1:

$$S = 1 + 2 + \cdots + 99$$
$$S = 99 + 98 + \cdots + 1$$

De unde prin adunare se obţine că: $2 \times S = \underbrace{100 + 100 + \cdots + 100}_{\text{de 99 de ori}}$

Obţinem că: $2 \times S = 9900$ de unde S = 4950.
Se observă că: $S = 99 \times 100 : 2$
Metoda 2: $S = 1 + 2 + \cdots + 99 = (1 + 99) + (2 + 98) + \cdots + (49 + 51) + 50 = 100 + 100 + \cdots + 100 + 50 = 49 \times 100 + 50 = 4950$

37. Calculaţi următoarele sume și identificaţi o formulă de calcul:
    a) $1 + 2 + 3 + \cdots + 49 =$
    b) $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 =$
    c) $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000 =$

Aţi observat că? Formula de calcul pentru suma primelor *n* numere naturale nenule este:

$$1 + 2 + \cdots + n = n \times (n + 1) : 2$$

38. a) Câte numere sunt de la 28 la 56?
    b) Calculaţi în trei moduri suma: 28 + 29 + ... + 56 =

39. Calculaţi în trei moduri suma: 100 + 101 + ... + 199 =

De reţinut!

Un şir de numere în care fiecare termen se obţine adunând un același număr (numit *pas* sau *raţie*) termenului precedent se numește *progresie aritmetică.*

Pentru o progresie aritmetică:

Numărul de termeni = (ultimul termen – primul termen) : pas + 1

40. Câte numere sunt în șirurile:
    a) 2, 4, 6, ..., 100
    b) 1, 3, 5, ..., 99
    c) 3, 6, 9, ..., 99
    d) 2, 7, 12, 17, ..., 97
    e) 1, 5, 9, ..., 397

41. Pentru șirurile următoare scrieţi următorii trei termeni şi stabiliţi care din numerele 22, 97, 87, 200, 2002, 145, 146 sunt termeni ai șirului:
    a) 1, 3, 5, 7, ...
    a) 2, 7, 12, 17, ...
    b) 3, 7, 11, 15, ...
    c) 1, 4, 7, 10, ...

☞**Sugestie:** Observaţi *câturile* și *resturile* împărţirii termenilor șirurilor la *pas*.

☞**Soluţie pt.c):** Pasul este 4, deci termenii care urmează sunt: 19, 23, 27, etc. Se observă că fiecare termen al șirului împărţit la 4 dă restul 3. Ca urmare vor fi termeni ai șirului acele numere care prin împărţire la 4 dau restul 3.

42. Scrieţi următorii trei termeni ai șirurilor, al 10-lea și al 100-lea termen:
    a) $1, 5, 9, \ldots$
    b) $3, 8, 13, 18, \ldots$
    c) $2, 6, 10, 14, \ldots$

☞**Soluţie pt.c):** Pasul este 4, deci termenii care urmează sunt: 18, 22, 26, etc. Se observă că fiecare termen al șirului împărţit la 4 dă restul 2. Primul termen este egal cu $0 \times 4 + 2$, al doilea termen este $1 \times 4 + 2$, etc. Deci al zecelea termen este $9 \times 4 + 2$, iar al 100-lea termen este $99 \times 4 + 2$.

43. Calculaţi în mai multe moduri sumele următoare:
    a) $2 + 4 + 6 + \ldots + 100 =$
    b) $1 + 3 + 5 + \ldots + 100 =$
    c) $3 + 6 + 9 + \ldots + 99 =$
    d) $2 + 7 + 12 + 17 + \ldots + 97 =$
    e) $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 98 =$
    f) $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 100 =$

✋ **De reţinut!** Pentru a calcula mai rapid se poate utiliza formula de calcul a sumei termenilor unei progresii aritmetice și anume:

S = (primul termen+ultimul termen) × numărul de termeni : 2

44. Rezultatul calculului $1000 - 2 - 4 - 6 - \cdots - 50$ este:
    a) 650; b) 450; c) 550; d) 250; e) 350.

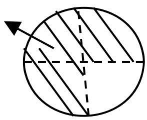
(Concursul *Lumina Math*, 2008, cl. a IV-a)

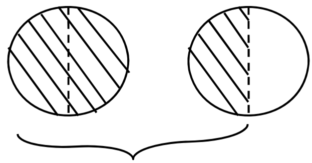
1.2. Probleme cu fracţii și operaţii cu fracţii

✐ **Probleme propuse:**

1. Reprezentaţi grafic fracţiile, iar pentru fracţiile supraunitare scoateţi întregii din fracţie: o doime; trei pătrimi; două treimi; $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{3}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{4}, \frac{2}{1}$.

☑ **Exemple:**





$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

2. Introduceţi întregii în fracţie și reprezentaţi grafic: $1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{5}{6}, 3\frac{3}{4}, 4\frac{3}{7}$.

☑**Exemplu:** $1\frac{1}{2} = \frac{1\times 2+1}{2} = \frac{3}{2}$

3. Comparaţi fracţiile: a) $\frac{3}{4}$ cu $\frac{2}{3}$; b) $\frac{5}{6}$ cu $\frac{7}{8}$; c) $\frac{2}{3}$ cu $\frac{5}{8}$.

4. Care din următoarele fracţii $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ este egală cu fracţia $\frac{1}{2}$? Ce observaţi?

Aţi observat că? Dintr-o fracţie se pot obţine fracţii egale (echivalente) cu ea prin amplificare sau simplificare, adică înmulţind respectiv împărţind atât numărătorul cât și numitorul cu un același număr.

5. Care din următoarele fracţii $\frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{8}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{14}, \frac{10}{15}$ este egală cu fracţia $\frac{2}{3}$?

6. Scrieţi câte trei fracţii egale cu fracţia: a) $\frac{12}{30}$; b) $\frac{8}{18}$; c) $\frac{2}{5}$.

7. Ordonaţi crescător fracţiile:
   a) $\frac{7}{4}, \frac{7}{7}, \frac{13}{6}, \frac{5}{8}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}$.
   b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \frac{4}{6}, \frac{7}{4}, \frac{6}{3}, \frac{2}{6}$.
8. Care sunt vecinii numărului $\frac{3}{4}$? Alegeţi varianta corectă și justificaţi:

   a) $\frac{2}{4}$ și $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{5}$ și 1; c) 0,74 și 0,76; d) 0,749 și 0,751;

   e) Nu are vecini.
9. Aflaţi:

   a) $\frac{2}{3}$ din 15; b) $\frac{3}{4}$ din 20; c) $\frac{5}{8}$ din 24.
10. Cât este un număr dacă:

    a) $\frac{4}{5}$ din el este 8; b) $\frac{3}{7}$ din el este 1200; c) $\frac{4}{5}$ din el este 96.
11. Nuferii unui lac îşi dublează numărul în fiecare zi. După 80 de zile lacul se umple de nuferi. După câte zile lacul a fost umplut pe un sfert cu nuferi?
12. Adrian are o pungă cu 32 de bomboane. În fiecare zi mănâncă jumătate din câte bomboane are în pungă. După câte zile a mâncat trei sferturi din bomboanele din pungă? După câte zile îi mai rămâne o singură bomboană în pungă?
13. O tabletă de ciocolată e formată din 24 de bucăţi. Câte bucăţi rămân după ce Maria mănâncă un sfert din ea?
14. Maria a primit o pungă cu bomboane. După ce a mâncat un sfert din ele i-au mai rămas 18 bomboane. Câte bomboane erau iniţial în pungă?
15. Ana locuiește la etajul cinci. Numărând treptele, după ce a urcat două etaje a constatat că au fost 18 trepte. Câte trepte mai are de urcat?

16. Ana are 100 de lei care reprezintă două cincimi din suma de bani a Adrianei. Câţi bani au împreună cele două fete?

17. Mihai după un sfert din drumul pe care îl are de parcurs de acasă spre școală ajunge la o covrigărie. De acolo până la trei sferturi din drum mai are de parcurs 150 de metri. Ce distanţă are de parcurs Mihai de acasă până la școală?

18. Un automobil după ce parcurge $\frac{3}{4}$ din drum mai are de străbătut încă 750 m până la $\frac{13}{16}$ din drum. Ce lungime are drumul?

19. Calculaţi:

a) $\frac{11}{5} + \frac{4}{5} =$ b) $1\frac{2}{3} + \frac{1}{3} =$ c) $\frac{13}{5} - \frac{4}{5} =$ d) $\frac{11}{15} + \frac{4}{5} =$

e) $\frac{13}{15} - \frac{4}{5} =$ f) $1 + \frac{4}{5} =$ g) $\frac{7}{4} + (\frac{4}{5} + 1) =$ h) $\frac{7}{4} - (1 - \frac{1}{4}) =$

i) $\frac{7}{4} - (1 - \frac{1}{6}) =$ j) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$ k) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} =$

20. Calculaţi suma numerelor:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2018};\ B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2017}{2018}$$

21. Calculaţi diferenţa numerelor:

$$A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{2019}{2018};\ B = 1 + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \cdots + \frac{2}{4036}$$

22. Arătaţi egalităţile:

a) $\frac{1}{1\times2} = 1 - \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{3\times4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

23. Calculaţi sumele:

a) $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4}$; b) $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{9\times10}$;

c) $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{2017\times2018}$.

☞**Sugestie:** Scrieţi fiecare fracţie ca diferenţă de două fracţii ca în exerciţiul anterior.

1.3. Probleme cu mărimi şi unităţi de măsură

✏ Probleme propuse:

1. Efectuaţi transformările:
   a) 10 m = … cm = … dam
   b) 120 m= ...cm = ... km
   c) kg = … hg = … dag = … g
   d) t 25 kg = …kg
   e) 17 dal = … l = … ml
   f) 1300 ml = …l = … hl
   g) 2 zile 3 ore = ... min
   h) 15 h = ... min= ... s
   i) 1 an bisect = ... zile = ... min = ... s
   j) 1850 min = ... h ... min
   k) 16790 s = ...h ... min ... s
   l) 169000 s = ... zile ... h ... min ... s
   m) 0,3 ore = ... min
   n) 16,25 h = ... min

2. Calculaţi:
   a) 500 cm + 120 dam = … m
   b) 4 km 350 m – 2km 700 m = ... km ... m
   c) 2 km 750 m + 8 km 350 m = ... km ... m
   d) 1340 kg + 12 t = … kg
   e) 12 l + 40 dl + 300 cl + 2000 ml = … l
   f) 12 l 88 dl 65 cl + 13 dl 55cl = … l … dl … cl
   g) 3260 s + 320 min= … h … min … s
   h) 1 zi + 27 ore + 1135 min = … zile … ore … min
   i) 3 h 45 min 55 s + 4 h 15 min 20 s = … h … min… s
   j) 5 h 20 min 15 s – 3 h 25 min 20 s = … h … min… s

3. Mama cumpără de la un magazin 2 kg de mere, 500 g de griș, un sfert de kg de cafea și 6 pachete de biscuiţi. Știind că plasa plină cântărește 373 dag, iar plasa goală 80 g, aflaţi câte g cântarește un pachet de biscuiţi.

4. Pentru o excursie a unei clase cu 28 de copii s-a cumpărat apă astfel: 80 de sticluţe de 250 ml, 60 de sticluţe de 350 ml și 28 de sticle de 500 ml. Câţi l de apă s-au cumpărat? La finalul excursiei au mai rămas 10 sticluţe de 250 ml, 30 sticluţe de 350 de ml și nicio sticlă de 500 ml. Câtă apă au băut în total copiii și câtă apă a băut în medie un copil?

5. Un tren parcurge în jumătate de oră 25 km, iar un vapor întrun sfert de oră 5 km. În cât timp vaporul va parcurge distanţa pe care trenul o face în 6 ore?

6. Pe o hartă distanţa de 1 cm reprezintă 800 m în realitate. Distanţa dintre două orașe pe hartă este de 5 cm. Câţi km sunt între cele două orașe în realitate?

7. Cangurul Jumpi a observat că în fiecare iarnă se îngraşă cu 5 kg şi în fiecare vară slăbeşte cu 4 kg. Primăvara şi toamna nu-şi schimbă greutatea. În primăvara anului 2008 el cântăreşte 100 kg. Cât cântărea Jumpi în toamna anului 2004?
   a) 92 kg ; b) 108 kg; c) 100 kg; d) 96 kg; e) 109 kg.
   (Concursul *Cangurul,* 2008)

8. Mama cumpără de la un magazin 2 kg de mere, 500 g de griș, un sfert de kg de cafea și 6 pachete de biscuiţi. Știind că plasa plină cântărește 373 dag, iar plasa goală 80 g, aflaţi câte g cântarește un pachet de biscuiţi.

9. Ceasul digital arată 20:07. Cât de repede vor apărea din nou pe ecranul ceasului aceste cifre?
   a)în 4 ore 20 min ; b) în 6 ore; c) în 2 ore; d) în 63 min; e) în 24 ore.
   (Concursul *Cangurul*, 2007)

10. Un ceas digital afișează ora cu patru cifre. De câte ori într-o zi ora va fi afișată doar cu cifrele 1 și 5 ?

11. Dan e născut în 1 aprilie 2001, iar Mihai e cu 1 an, o lună și o zi mai mic. În ce zi s-a născut Mihai?

12. a) O cutie de pizza cântărește 352 de grame. Cutia goală cântărește 48 de grame. Cât cântărește pizza din cutie? Știind că pizza e împărţită în 8 felii cât cântărește fiecare felie?
b) Pentru pregătirea unei pizza sunt necesare 5 minute, iar pentru coacerea ei este nevoie de 10 minute. Vlad face comanda la ora 14:15. La ce oră va primi Vlad pizza?
(prelucrare după subiect dat la *Testarea naţională* cl. a IV-a, 2016)

13. Astăzi 12 martie 2012, rățuștele bunicului meu au împlinit 20 de zile. În ce dată au ieșit din ouă?
a) Pe 26 februarie ; b) Pe 22 februarie; c) Pe 24 februarie;
d) Pe 25 februarie; e) Pe 27 februarie.
(Concursul *Cangurul*, 2012)

14. Filmul durează 90 de minute. A început la ora 17:10, iar la mijlocul lui a fost întrerupt de două reclame, una de 8 minute și alta de 5 minute. La ce oră s-a terminat filmul?
a) 17:23 ; b) 18:00; c) 18:08; d) 18:40; e) 18:53.
(Concursul *Cangurul*, 2009)

15. Unele luni au câte 5 zile de „luni". Aceste luni nu pot avea:
a) 5 zile de „sâmbătă" ; b) 5 zile de „duminică";
b) 5 zile de „marţi"; d) 5 zile de „miercuri"; e) 5 zile de „joi".
(Concursul *Cangurul*, 2006)

16. Mara pleacă de acasă la 6:35 dimineață și sosește la școală la 7:32. Daria sosește la școală la 7:45 deși locuiește mai aproape și drumul durează cu 12 minute mai puţin. La ce oră pelacă de acasă Daria?
a) la 7:07 ; b la 7:20; c) la 7:25; d) la 7:30; e) la 7:33.
(Concursul *Cangurul*, 2002)

17. Fiecare dintre prietenii lui Basil își scrie data naşterii pe un bileţel, apoi adună numărul zilei de naștere cu numărul lunii în care s-a născut. Toţi obţin suma 35, deși toţi își aniversează ziua de naștere la date diferite. Care este numărul maxim de prieteni pe care îi poate avea Basil?
a) 7 ; b) 8; c) 9; d) 35; e) 12.
(Concursul *Cangurul*, 2010)

1.4. Probleme cu conţinut geometric

📖 **Breviar teoretic:**

- Se numeşte poligon o reuniune de segmente de forma $[A_1A_2]\cup[A_2A_3]\cup...\cup[A_nA_1]$ cu proprietatea că oricare două laturi nevecine nu au puncte comune şi două laturi vecine au un singur punct comun şi nu sunt în prelungire.
- Poligonul cu trei vârfuri se numeşte triunghi.
- Poligonul cu patru laturi se numeşte patrulater.
- Patrulaterul cu laturile opuse paralele două câte două se numeşte paralelogram.
- Paralelogramul cu un unghi drept se numeşte dreptunghi.
- Paralelogramul cu două laturi alăturate congruente se numeşte romb.
- Se numeşte pătrat dreptunghiul cu două laturi alăturate congruente sau rombul cu un unghi drept.
- Patrulaterul cu două laturi paralele şi două neparalele se numeşte trapez.
- Suma lungimilor laturilor unui poligon se numeşte perimetrul poligonului.
- Perimetrul dreptunghiului este: $2 \times L + 2 \times l$, unde L este lungimea iar l lăţimea dreptunghiului.
- Perimetrul pătratului este $4 \times l$, unde l este latura pătratului.

? Întrebări de verificare a cunoştinţelor teoretice:

A. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

1. Triunghiul este un poligon.
2. Triunghiul este un patrulater.
3. Paralelogramul are laturile alăturate inegale.
4. Paralelogramul nu poate avea unghiuri drepte.
5. Diagonalele paralelogramului au lungimi egale.

6. Paralelogramul poate avea diagonalele de lungimi egale.
7. Dreptunghiul este un patrulater.
8. Dreptunghiul este un trapez.
9. Diagonalele dreptunghiului au lungimi egale.
10. Dreptunghiul are laturile opuse de lungimi egale.
11. Dreptunghiul are laturile alăturate inegale.
12. Rombul e un dreptunghi.
13. Rombul este un paralelogram.
14. Diagonalele rombului au lungimi egale.
15. Rombul are toate laturile de lungimi egale.
16. Rombul are laturile opuse paralele.
17. Rombul are laturile alăturate de lungimi egale.
18. Rombul poate avea unghiurile drepte.
19. Pătratul nu este romb.
20. Pătratul e un dreptunghi.
21. Pătratul e un paralelogram.
22. Pătratul are laturile opuse paralele.
23. Pătratul este un trapez.
24. Diagonalele pătratului au lungimi egale.
25. Trapezul este un paralelogram.
26. Trapezul are laturile opuse paralele.
27. Trapezul are diagonalele de lungimi egale.
28. Trapezul poate avea diagonalele de lungimi egale.
29. Trapezul nu poate avea două laturi de lungimi egale.
30. Trapezul poate avea unghiuri drepte.

B. Completaţi afirmaţiile de mai jos:

1. Triunghiul este un .... cu trei laturi.
2. Patrulaterul are ... vârfuri.
3. Paralelogramul este un poligon cu ...
4. Paralelogramul are laturile opuse ...
5. Dreptunghiul are diagonalele...

6. Dreptunghiul are laturile alăturare...
7. Dreptunghiul are laturile opuse ...
8. Dreptunghiul are unghiurile...
9. Rombul are diagonalele ...
10. Rombul are laturile opuse ...
11. Rombul are laturile alăturate ...
12. Pătratul are laturile...
13. Pătratul are diagonalele ...
14. Pătratul are unghiurile ...
15. Trapezul are două laturi ... și două ...
16. Feţele cuboidului sunt (în formă de) ...
17. Feţele cubului sunt (în formă de) ...
18. Cubul are ... feţe.
19. Cubul are ... vârfuri.
20. Cubul are ... muchii.
21. Cilindrul are ... baze.
22. Bazele cilindrului sunt (în formă de) ...
23. Conul are ... baze.
24. Mulţimea punctelor egal depărtate de un punct dat formează în plan ...
25. Mulţimea punctelor egal depărtate de un punct dat formează în spaţiu ...

✏ **Probleme propuse:**

1. Aflaţi lungimile laturilor unui triunghi care are perimetrul 24 cm, suma a două laturi 14 cm, iar suma altor două laturi 18 cm.
2. Un triunghi isoscel (cu două laturi de lungimi egale) are perimetrul de 32 cm, iar una din laturi este cu 4 cm mai lungă decât altă latură. Aflaţi laturile triunghiului.
3. Un dreptunghi cu lăţimea de 130 dm şi lungimea cu 45 m mai mare are acelaşi perimetru ca al unui pătrat. Se cere lungimea laturii pătratului.

4. Aflaţi lungimile laturilor unui triunghi ştiind că dacă le adunăm două câte două se obţine pe rând: 17 m, 18 m şi 25 m.
5. Perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 120 m şi lăţimea de 5 ori mai mică este ... cm.
6. Lungimea unei laturi a unui patrulater este $\frac{3}{11}$ din perimetrul său, iar lungimea altei laturi este $\frac{4}{11}$ din perimetru. Calculaţi perimetrul patrulaterului dacă suma lungimilor acestor două laturi este 28 cm.
7. Un dreptunghi cu perimetrul de 40 cm are lungimea cu 4 cm mai mare decât lăţimea. Aflaţi dimensiunile dreptunghiului.
8. Dimensiunile unui dreptunghi se exprimă prin numere naturale consecutive. Dacă perimetrul dreptunghiului este 86 cm, atunci aflaţi lungimea şi lăţimea dreptunghiului.
9. Un dreptunghi are lăţimea egală cu $\frac{3}{5}$ din latura unui pătrat al cărui perimetru este 80 cm. Ştiind că cele două patrulatere au acelaşi perimetru, aflaţi dimensiunile dreptunghiului.
10. Un romb are perimetrul egal cu 100 cm. Calculaţi perimetrul unui dreptunghi care are lăţimea egală cu latura rombului, iar lungimea de 14 ori mai mare decât lăţimea.
11. Să se determine dimensiunile unui dreptunghi cu perimetrul de 20 cm ştiind că împărţind lungimea dreptunghiului la lăţimea sa obţinem câtul 2 şi restul 1.
12. Doi fraţi au moştenit două terenuri. Primul frate are un teren în formă de pătrat. Celălalt frate are un teren dreptunghiular cu lungimea mai mare cu 1 m decât latura pătratului şi cu lăţimea mai mică cu 1 m decât latura pătratului. Aflaţi care dintre cei doi fraţi are nevoie de mai mulţi m de gard pentru a îngrădi terenul?
13. O foaie de hârtie dreptunghiulară are dimensiunile de 192 mm şi 84 mm. Tai foaia de hârtie de-a lungul unei linii drepte, astfel încât să obţin pătratul cu latura cea mai mare. Apoi fac acelaşi lucru cu

dreptunghiul rămas şi tot aşa. Care este lungimea laturii ultimului pătrat obţinut?

a) 1 mm; b) 4 mm; c) 6 mm; d) 10 mm; e) 12 mm.

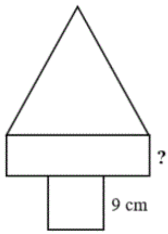
(Concursul *Cangurul*, 2012)

14. Un copil are cartonaşe de formă pătrată cu latura de 8 cm, iar altul dreptunghiuri cu laturile de 8 şi 12 cm. Care dinte ei va reuşi să acopere toată suprafaţa unei plăci dreptunghiulare, ştiind că ea are lungimea de 48 cm şi lăţimea de 20 cm?

15. Ana a primit o pungă cu 60 de cuburi colorate de latură 5 cm. Ea vrea să le așeze într-o cutie de formă paralelipipedică cu dimensiunile 30 cm, 20 cm și 15 cm. Încap toate cuburile în cutie? Dacă da, câte astfel de cuburi ar mai avea loc în cutie?

16. Maria are 20 de beţișoare, dintre care 5 cu lungimea de 5 cm, iar restul cu lungimi de 4 cm și 6 cm. Va reuși Maria să construiască un dreptunghi utilizând toate aceste beţișoare și fără să le rupă?

17. „Turnul” din imagine este format din 3 forme geometrice: pătrat, dreptunghi, triunghi echilateral (cu cele trei laturi egale). Perimetrul celor 3 figuri este același. Latura pătratului este de 9 cm. Care este lungimea laturii marcate în figură?



a) 4 cm; b) 9 cm; c) 6 cm;
d) 12 cm; e) 36 cm.

(Concursul *Cangurul*, 2009)

18. Din fiecare colţ al unui dreptunghi cu lungimea de 15 cm și lăţimea de 9 cm se taie câte un pătrăţel având perimetrul de 8 cm. Care este perimetrul figurii rămase?

a) 48 cm; b) 40 cm; c) 32 cm; d) 80 cm; e) 16 cm.

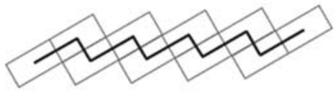
(Concursul *Cangurul*, 2007)

19. O foaie în formă de pătrat cu latura de 60 cm trebuie să fie tăiată în dreptunghiuri cu aceleași dimensiuni fără să se piardă părţi din foaie.

a) E posibil să se taie în dreptunghiuri cu lungimea de 5 cm și lăţimea de 4 cm? Dacă da, câte dreptunghiuri se obţin?
b) Ce dimensiuni numere naturale consecutive pot avea dreptunghiurile în care să se taie foaia de hârtie?

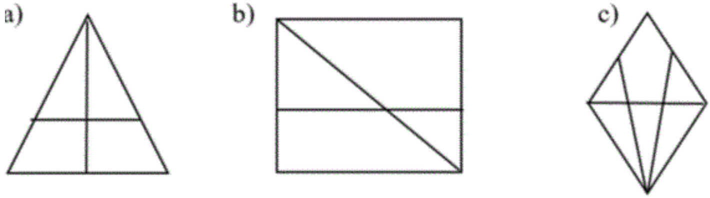
20. În grădină Anthony a construit o alee (ca în figură) folosind 10 plăci de marmură cu dimensiunile de 4 dm și 6 dm. Apoi a pictat o linie neagră care să unească toate centrele plăcilor. Ce lungime are această linie neagră?

a) 24 dm; b) 40 dm; c) 46 dm;
d) 50 dm; e) 56 cm.

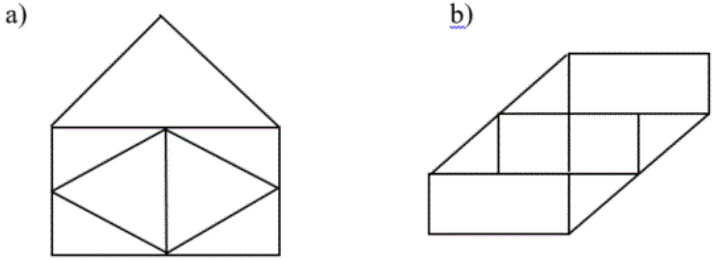


(Concursul *Cangurul*, 2009)

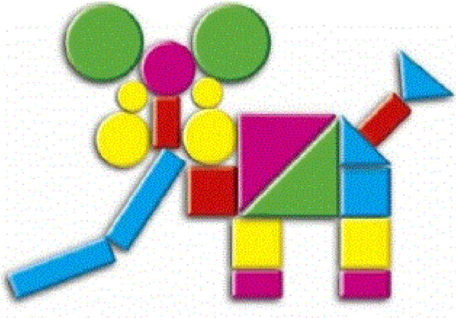
21. Câte triunghiuri și câte patrulatere sunt în figurile de mai jos?



22. Câte triunghiuri, dreptunghiuri, pătrate și romburi sunt în figurile de mai jos?

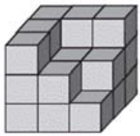


23. Acest elefant simpatic reprezintă mascota unei rachete. Scrie câte figuri geometrice de fiecare fel compun acest animal: cercuri, pătrate, triunghuri, dreptunghiuri.



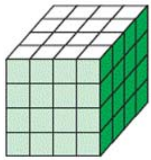
Testare naţională, clasa a IV-a, 2015

24. De câte cubuleţe are nevoie Tina pentru a completa cubul alăturat?
    a) 4; b) 5; c) 6; d) 22; e) 26.



(Concursul *Cangurul*, 2009)

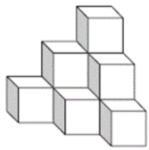
25. Am construit un cub mare din lemn din 64 de cubuleţe identice. Am colorat apoi 5 feţe ale cubului mare cu vopsea verde. Câte cubuleţe au 3 feţe verzi?
    a) 4; b) 8; c) 16; d) 20; e) 80.



(Concursul *Cangurul*, 2006)

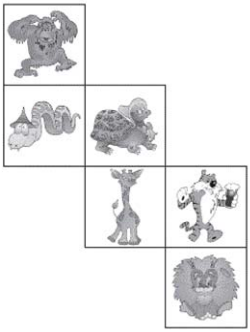
26. Unui cub construit din 27 de cubuleţe identice albe i se vopsesc 5 feţe cu vopsea roșie. Câte cubuleţe nu vor avea nicio faţă roșie, o faţă roșie, respectiv 2 feţe roșii? Există cubuleţe cu 3 feţe roșii, iar dacă da, câte?

27. Construcţia din figură este formată din 10 cubuleţe. Roman a pictat întreaga construcţie, inclusiv baza sa. Câte feţe de cub a pictat?
    a) 18; b) 24; c) 30; d) 36; e) 42.



(Concursul *Cangurul*, 2006)

28. Desfăşurarea alăturată este a unui cub de jucărie. Ce personaje se află pe două feţe opuse ale cubului?



A)  şi 

B)  şi 

C)  şi 

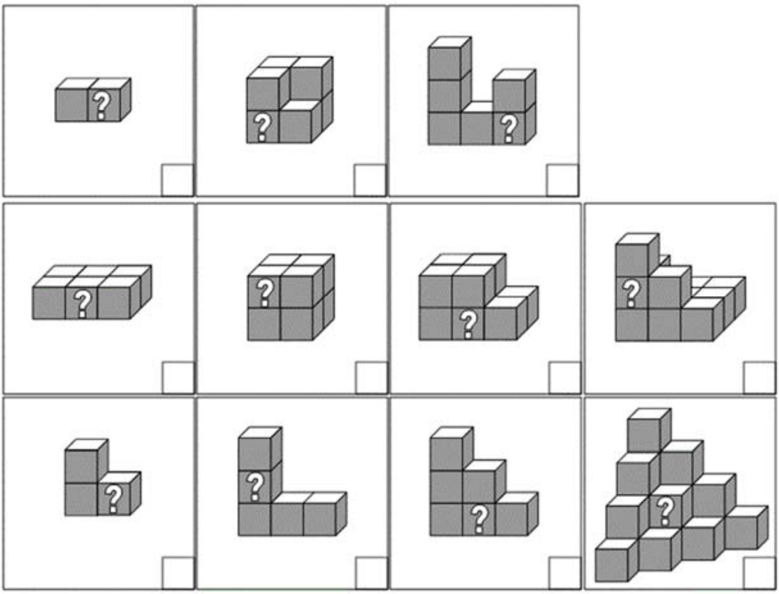
D)  şi 

E)  şi 

(Concursul *Cangurul*, 2007)

29. Pentru fiecare cub notat cu semnul întrebării număraţi câte feţe comune are cu cuburile vecine.

(după Berar şi Albu, 2004)



2. Probleme logico-matematice

2.1. Probleme de logică

La acest tip de probleme rezolvarea predomină raţionamentul de rezolvare a problemei şi nu conţinuturile matematice pe care le abordează. Aceste probleme necesită pentru rezolvare cunoştinţe matematice de bază, au un caracter interdisciplinar şi sunt accesibile oricui, indiferent de vârstă sau pregătire.

✏ **Probleme propuse:**

1. *Lupul, capra şi varza* este una dintre cele mai vechi şi mai cunoscute probleme de logică. Ca problemă-glumă a fost publicată iniţial de Alcuin (Albinus Flacus) în *Propositiones ad acuendos juvenes* (în anul 800) şi este formulată astfel:
   Un om trebuia să treacă peste o apă un lup, o capră şi o varză. Avea la dispoziţie o barcă în care nu încăpea decât el împreună cu unul din cele două animale sau cu varza. Dacă rămâneau pe mal lupul şi capra, atunci lupul devora capra, dacă rămânea capra cu varza, atunci capra mânca varza. În prezenţa omului nimeni nu mânca pe nimeni. Omul nostru izbuti totuşi să-i treacă pe toţi trei peste apă. Cum a procedat?

2. Un ofiţer cu 25 de soldaţi ajung pe malul unei gârle. Nu era nici un pod pe acolo. Ofiţerul vede pe malul celălalt o luntre cu doi copii. El îi cheamă pe copii şi aceştia vin cu luntrea. În luntre nu încăpeau decât un soldat sau cei doi copii. Cum procedează şi câte drumuri trebuie să se facă cu luntrea pentru a putea trece dincolo toţi cei 25 de soldaţi, ofiţerul şi cei doi copii?

3. Cinci case sunt în şir şi au culorile: albă, brună, cenuşie, galbenă şi neagră. Care este ordinea caselor ştiind că toate relaţiile următoare sunt adevărate?
   - casa brună este vecină cu cea cenuşie;
   - casa galbenă nu este la mijloc;

- de la casa galbenă la cea neagră este tot atât cât de la casa albă la cea brună;
- vecina din dreapta a casei galbene este casa albă;
- prima casa este neagră;
- casa cenuşie nu este ultima.

4. Trei tineri porecliţi Blondul, Brunetul şi Roşcatul se aflau într-o cofetărie. „Este ceva curios, spune unul dintre ei, deşi noi trei avem: unul părul blond, altul părul brun şi cel de-al treilea părul roşcat nici unul dintre noi nu are culoarea părului corespunzătoare poreclei”. Ce culoare de păr are fiecare ştiind că Blondul nu are părul roşcat?

5. Scrieţi următoarele trei numere din șir:
   a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (Șirul lui Fibonacci)
   b) 10, 11, 14, 19, 26, 35, 46, ...
   c) 1, 3, 4, 2, 5, 7, 8, 6, 9, 11, 12, 10, ...
   (Concusul *Cangurul*, 2005)
   d) 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, ...

6. Andra construiește o secvenţă de forme triunghiulare formate din romburi albe și negre. Fiecare formă triunghiulară are câte un rând în plus faţă de forma anterioară; în fiecare formă triunghiulară, numai ultimul rând conţine două romburi albe la exterior. Din câte romburi negre este formată figura 6?



   a) 19; b) 21; c) 26; d) 28; e) 34.
   (Concursul *Cangurul*, 2014)

7. Iulian, Mara, Nic și Fabian au împreună: o pisică, un câine, un pește și un canar. Mara are un animal cu blană, Fabian are un animal cu 4 picioare, Nic are o pasăre iar Iulian și Mara nu iubesc pisicile. Nu e adevarat că ...
   a) Fabian are un câine; b)Nic are un canar;
   c) Iulian are un pește; d) Fabian are o pisică;
   e) Mara are un câine.
   (Concu rsul *Cangurul*, 2002)

8. Două pisici, Tiny și Tony și doi câini, Dim și Dills-au întâlnit unii cu ceilalţi. Tiny se temea de ambii câini, iar Tony se temea de Dim, dar era prieten cu Dill. Care afirmaţie este întotdeauna falsă?
   a) Fiecare pisică se teme de un câine;
   b) Una dintre pisici nu se teme de un câine;
   c) Există un câine care înspăimântă ambele pisici;
   d) Fiecare câine înspăimântă o pisică;
   e) Există un câine prietenos cu ambele pisici.

   (Concursul *Cangurul*, 2005)

9. Dragonul a ascuns cheia cufărului în care păstra comoara într-unul dintre cele 3 seifuri. Pe seiful roșu a scris „cheia comorii", pe seiful albastru a scris „șarpe veninos", iar pe seiful verde a scris „cheia comorii este în seiful albastru". Dacă toate mesajele sunt false, în ce seif se afla cheia?
   a) în seiful roșu; b) în seiful albastru; c) în seiful verde;
   d) în seiful roșu sau albastru, dar nu se poate stabili sigur în care;
   e) este imposibil de aflat deoarece nu sunt suficiente date.

   (Concursul *Cangurul*, 2010)

10. Cum pot să aduc de la un râu *6l* de apă deodată având la dispoziţie doar două găleţi, una de *4l* şi cealaltă de *9l*?

11. Am 9 monede dintre care una falsă mai ușoară decât celelalte și o balanţă cu talere. Cum pot din 3 cântăriri să aflu moneda falsă?

12. Separaţi 9 kg de fasole în două părţi, una de 7 kg, având la dispoziţie o balanţă cu două talere și două greutăţi, una de 50 g și alta de 200 g. Realizaţi această separare în cel mult trei cântăriri.

13. Doi prieteni trebuiau să plătească la o cafenea câte 10 lei fiecare. Ospătarul însă le-a spus că fiind clienţi fiedeli beneficiază de o reducere de 5 lei, din care cei doi i-au lăsat un bacșiș de 3 lei. Mai apoi însă au judecat astfel: noi trebuia să dăm 20 de lei, și cum am primit înapoi 2 lei, înseamnă că am plătit 18 lei. Dar împreună cu cei 3 lei de bacsiș totalul ar fi fost 21 de lei. De unde a apărut 1 leu în plus?

2.2. Principiul lui Dirichelet

📖 **Aspecte teoretice:**

*Principiul lui Dirichelet (*numit și *Principiul cutiei)* este : *Dacă n+1 obiecte sunt dispuse în n cutii, atunci există o cutie care conţine cel puţin 2 obiecte.*

✏**Probleme propuse:**

1. Într-un sertar sunt 7 perechi de șosete având modele diferite. Care este numărul minim de șosete pe care trebuie să le iau fără să mă uit, ca să fiu sigur că am scos o pereche?
2. Arătaţi că oricum am alege 8 copii există 2 născuţi în aceeași zi a săptămânii.
3. Arătaţi că într-o clasă cu 25 de elevi există cel puţin 3 născuţi în aceeași lună.
4. Câţi copii trebuie să fie într-o școală pentru ca să existe sigur trei născuţi în aceeași zi a anului?
5. Arătaţi că oricum am alege trei numere naturale există două care au suma pară.
6. Arătaţi că oricum am alege 11 numere există două a căror diferenţă să se împartă la 10.
7. Într-un pătrat cu latura de 10 cm s-au pus 101 puncte. Să se arate că există 2 puncte care se găsesc într-un pătrat cu latura de 1 cm.
8. Într-un bloc cu 40 de apartamente se aduc 81 de scrisori. Arătaţi că cel puţin un apartament va primi 3 scrisori.
9. Pentru o acţiune caritabilă se aduc 100 de mere și 150 de portocale care se repartizează cel puţin câte 3 într-un pachet. Se fac 83 pachete. Arătaţi că există sigur un pachet cu 4 fructe.
10. Dan are pe masă 50 de cuburi colorate: 17 roșii, 14 galbene, 10 verzi și 9 albastre. Prietenul său Sorin legat la ochi trebuie să

extragă un număr de cuburi astfel încât să fie sigur că a extras 3 cuburi de aceeași culoare. Care e numărul minim de cuburi pe care trebuie să le extragă Sorin?

11. Ana a mers la tenis în luna iunie de 16 de ori. Arătaţi că există sigur 3 zile consecutive în care Ana a mers la tenis. De câte ori ar fi trebuit sa meargă Ana la tenis în luna iulie pentru a ști sigur că vor exista 3 zile consecutive în care a jucat tenis?

12. Într-o cutie sunt 2 creioane galbene și 5 roșii. Care este numărul minim de creioane pe care legaţi la ochi trebuie să le extragem pentru a fi siguri că am extras 2 creioane roșii?

13. Magicianul are în pălărie șoareci: 14 gri, 8 albi și 6 negri. Care este numărul cel mai mic de șoareci pe care trebuie să-i scoată din pălărie legat la ochi pentru a fi sigur că are cel puţin un șoarece de fiecare culoare?
    a) 23; b) 22; c) 21; d) 15; e) 9.

    (Concursul *Cangurul*, 2002)

14. Se știe că nimeni nu poate avea mai mult de 299 999 de fire de păr pe cap. Într-un oraș sunt peste 2 100 000 de locuitori. Să se arate că cel puţin 8 locuitori ai orașului au același număr de fire de păr pe cap.

2.3. Probleme de numărare

✐ **Probleme propuse:**

1. Într-o încăpere sunt 8 persoane. Fiecare dă mâna cu toţi ceilalţi o singură dată. Câte strângeri de mână au loc?

2. La un concurs de șah participă 12 elevi. Câte meciuri se vor organiza știind că fiecare doi elevi trebuie să joace un meci?

3. Mihai are în portofel 7 monede de 50 bani, 10 bancnote de 1 leu și 3 bancnote de 5 lei. În câte moduri poate plăti o carte care costă 14 lei?

4. Maria are 3 tricouri, 4 fuste și 2 perechi de sandale. În câte moduri se poate îmbrăca?

5. În câte moduri pot așeza pe un raft 3 cărţi diferite? Dar 4 cărţi?

6. În câte moduri se pot așeza la o masă circulară 3 persoane? Dar 4 persoane? (2 aranjări se consideră a fi diferite atunci când cel puţin o persoană are vecini diferiţi într-o aranjare faţă de cealaltă)

7. Câte numere de trei cifre se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 şi 3? Dar dacă cifrele trebuie să fie distincte?

8. Câte cifre se folosesc pentru numerotarea unei cărţi care are 180 de pagini?

9. Laura, Iggy, Val și Kate doresc să se fotografieze împreună. Kate și Laura sunt foarte bune prietene și doresc să stea una lângă alta. Iggy vrea să stea lângă Laura. În câte moduri se pot așeza cei 4 prieteni în fotografie?
   a) 3 ; b) 4; c) 5; d) 6; e) 7.
   (Concursul *Cangurul*, 2012)

10. John începe seria scrisorilor de Crăciun trimiţându-i o scrisoare colegului său Peter. De acum înainte, oricine primeşte o scrisoare este obligat să scrie altor doi colegi. Peter a trimis câte o scrisoare lui Andre şi lui Miki, iar aceştia, la rândul lor, au trimis fiecare câte o scrisoare altor doi colegi. La sfârşitul primelor două runde erau trimise $1 + 2 + 4 = 7$ scrisori. Câte scrisori erau trimise după 4 runde?
    a) 15; b) 16; c) 31; d) 4; e) 63.
    (Concursul *Cangurul*, 2010)

11. Într-un seif sunt 5 sertare, în fiecare sertar sunt 3 cutii, iar în fiecare cutie sunt 10 monede de aur. Seiful, sertarele și cutiile sunt închise fiecare cu un lacăt. Câte lacăte trebuie deschise pentru a putea lua 50 de monede?
    a) 5; b) 6; c) 7; d) 8; e) 9.
    (Concursul *Cangurul*, 2015)

2.4. Probleme de organizare a datelor în tabele și diagrame

Problemele de organizare a datelor în tabele şi diagrame prefigurează studiul statisticii care trebuie să fie cunoscut la nivel de cultură generală de fiecare persoană având în vedere prezenţa elementelor de statistică în toate domeniile de activitate şi în realitatea de zi cu zi.

📖 **Aspecte teoretice:**

Problemele de organizare a datelor în tabele și diagrame pot fi de două tipuri:

- Probleme la care pentru rezolvare datele trebuie organizate în tabele sau diagrame.
- Probleme la care se dau date centralizate în tabele și diagrame, iar cerinţa se formulează pe baza acestora.

Organizarea datelor poate fi făcută prin:

- Diagrame Venn-Euler de reprezentare a mulţimilor;
- Tabele cu o singură intrare;
- Tabele cu două intrări de tip matrice;
- Diagrame: histograme, cu bare orizontale, cu bare verticale, circulare, liniare, mixte;
- Grafice;
- Alte reprezentări.

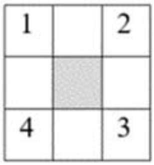
✏ **Probleme propuse:**

1. Într-o clasă sunt 28 de elevi. Ştiind că 16 elevi participă la cursul de origami, 18 la cel de grafică iar 3 la nici un curs aflaţi câţi elevi participă la ambele cursuri.
2. Un crescător de găini comercializează ouă roșii și albe pe care le pune în 88 de cofraje. În 29 de cofraje sunt doar ouă albe, iar în 40 de cofraje ouă de ambele culori. În câte cofraje sunt doar ouă roșii?

3. În comuna Domnești potrivit unei statistici afișate de primărie se cultivă legume, fructe și plante medicinale. Din cele 350 de familii ale comunei 70 de familii cultivă doar fructe, 60 de familii cultivă doar legume, 80 de familii cultivă doar plante medicinale, 50 de familii cultivă fructe și plante medicinale, 40 de familii cultivă legume și plante medicinale iar 30 de familii cultivă legume și fructe. Câte familii cultivă legume și fructe și plante medicinale?
(E. Dăncilă, I. Dăncilă, 2008, *Matematica pentru învingători*)

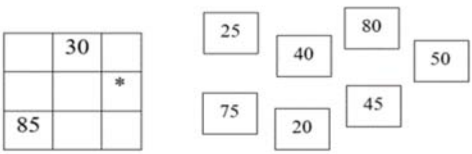
4. Ana, Blanka, Cecilia și Diana practică fiecare câte un sport, și anume: karate, fotbal, volei sau judo. Anei nu-i plac sporturile care se joacă cu mingea, iar judoka Blanka merge deseori la meciurile de forbal pentru a o vedea pe Diana jucând. Care dintre afirmaţiile următoare este adevărată?
a) Ana joacă volei; b) Blanka joacă fotbal;
c) Diana practică karate; d) Cecilia joacă volei;
e) Ana practică judo.
(Concursul *Cangurul*, 2007)

5. Nick scrie în careul 3 × 3 alăturat toate cifrele de la 1 la 9 (în fiecare pătrăţel scrie câte o cifră). Două cifre sunt considerate „vecine” dacă se află în pătrăţele care au o latură comună Nick observă că suma vecinilor lui 5 este 13, și că suma vecinilor lui 6 este tot 13. Ce număr este scris în pătrăţelul gri?
a) 5; b) 6; c) 7; d) 8; e) 9.



(Concursul *Cangurul*, 2014)

6. Milan așează numerele în careu așa încât pe fiecare coloană și pe fiecare rând suma numerelor să fie 150. Ce număr înlocuiește steluţa?
a) 48 cm; b) 40 cm;
c) 32 cm; d) 80 cm;
e) 16 cm.



(Concursul *Cangurul*, 2007)

7. În tabel sunt înregistrate rezultatele celor 3 câştigători ai Concursului „Te joci cu Lego”.

	Mădălin	*Adina*	*Cornel*
Etapa I	34 de puncte	36 de puncte	43 de puncte
Etapa a II-a	54 de puncte	71 de puncte	57 de puncte

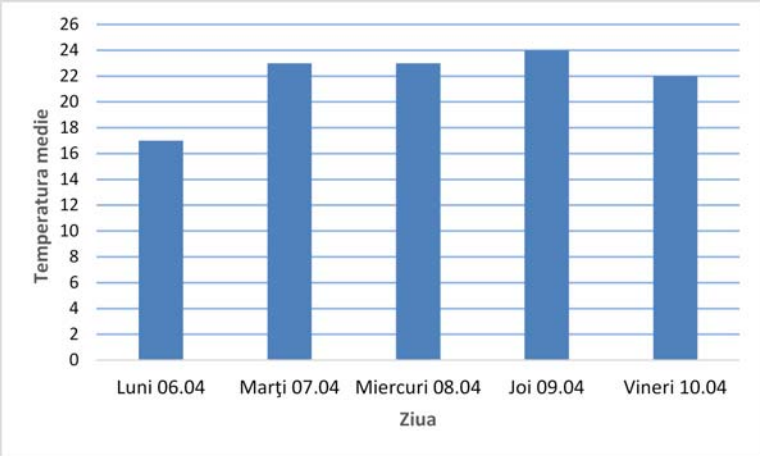
a) Care este câştigătorul care a obţinut cele mai multe puncte, în total, în cele două etape?
b) Câte puncte au câştigat în total cei trei elevi la etapa I şi respectiv a II-a?
c) Care este diferenţa maximă înregistrată între punctajele celor trei copii la etapa I, respectiv a II-a?
(prelucrare după subiect dat la *Testarea naţională* cl. a IV-a, 2017)

8. În anul şcolar trecut, elevii au realizat următoarele acţiuni:

Acţiunile	**Numărul lor**	
	Semestrul I	*Semestrul al II-lea*
Donaţii de carte	6	4
Donaţii de haine	2	9
Donaţii de alimente	3	5
Donaţii de jucării	8	1

a) În care semestru s-au organizat cele mai multe acţiuni de donare de alimente?
b) Ce fel de produse au fost donate cel mai mult în cele două semestre la un loc?
c) În care dintre cele două semestre au fost donate produse mai multe şi cu cât?
d) Câte produse au fost donate în total în cele două semestre?
(prelucrare după subiect dat la Testarea *naţională* cl. a IV-a, 2015)

9. În graficul de mai jos sunt prezentate temperaturile medii ale aerului, exprimate în grade Celsius, în săptămâna „Şcoala Altfel”, 6-10 aprilie 2015.



a) Care a fost ziua în care s-a înregistrat temperatura medie de 24 de grade Celsius?
b) Care a fost diferenţa maximă de temperatură înregistrată în săptămâna respectivă?
c) În ce zile a fost înregistrată aceeași temperatură?

(prelucrare după subiect dat la *Testarea naţională* cl. a IV-a, 2015)

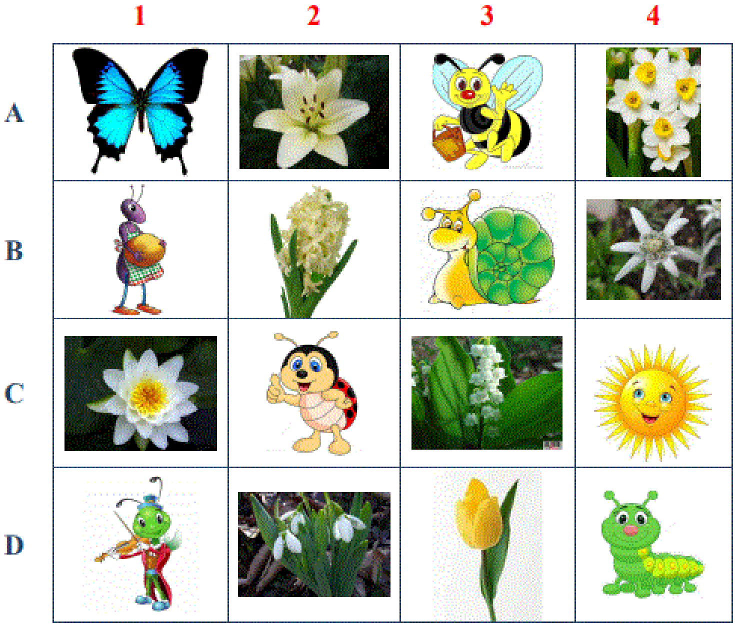
10. În tabelul de mai jos sunt înregistrate feliile de pizza mâncate de patru copii la o petrecere de aniversare a unui coleg.

	Pizza cu pui	**Pizza cu ton**	**Pizza cu brânză**	**Pizza cu ciuperci**
Adina	**2**	**1**	**2**	**2**
Diana	**1**	**0**	**2**	**0**
Sorin	**3**	**1**	**0**	**1**
Vlad	**3**	**1**	**0**	**3**

a) Cine a consumat cele mai multe felii de pizza și cine cele mai puţine?
b) Scrieţi numele celor doi copii care au mâncat felii de pizza în mod egal.
c) Realizaţi o diagramă cu bare verticale în care pe axa orizontală să apară tipurile de pizza iar pe axa verticală numărul de felii mâncate.

d) Ce fel de pizza s-a consumat cel mai mult, și care fel cel mai puţin?
e) Câte felii de pizza s-au consumat în total de către cei patru copii?
(prelucrare după subiect dat la *Testarea naţională,* cl. a IV-a, 2016)

11. În careul de mai jos sunt înscrise propunerile de mascotă pentru pizzerie. Soarele, de exemplu se află în caseta C4.

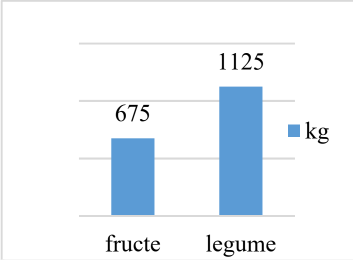


a) În ce casetă se află furnica?
b) Pe ce linie se gasește o singură floare?
c) Pe ce coloană se găsesc cele mai multe flori?
d) Ce fracţie reprezintă florile din totalul propunerilor?
e) Ce fracţie reprezintă animalele din totalul propunerilor?
f) Realizaţi o diagramă circulară cu trei sectoare: unul pentru flori, unul pentru animale și unul pentru restul propunerilor.

(prelucrare după subiect dat la *Testarea naţională* cl. a IV-a, 2016)

12. La un depozit s-au adus mere, pere, cartofi și roșii a căror cantități au fost centralizate în diagramele de mai jos.





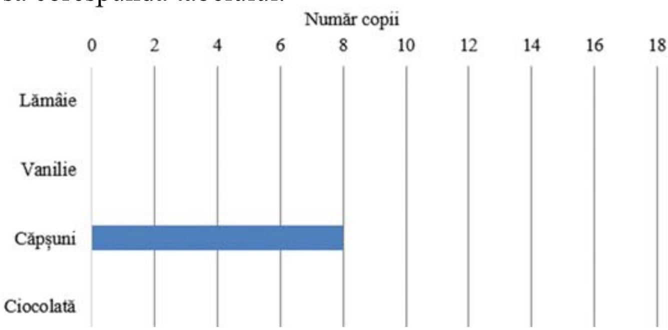
a) Câte kg de produse s-au adus în total la depozit?
b) Ce fracție reprezintă cartofii din totalul de produse?
c) Ce fracție reprezintă reprezintă fructele din totalul de produse?
d) Ce fracție reprezintă legumele din totalul de produse?
e) Câte kg din fiecare fel de produse s-au adus la depozit?

13. În tabelul alăturat sunt centralizate aromele de înghețate preferate de copii.

a) Care este aroma preferată de copii?
b) Câți copii aleg vanilia ca fiind aroma preferată?
c) Câți copii au răspuns cu privire la aromele preferate pentru înghețată?
d) Completați diagrama de mai jos ca să corespundă tabelului.

Aroma	**Număr de copii**
Vanilie	
Ciocolată	
Căpșuni	
Lămâie	

 înseamnă 4 copii



(prelucrare după subiect *TIMSS*, 2011)

3. Metode de rezolvare a unor probleme de aritmetică

3.1. Metoda figurativă (grafică)

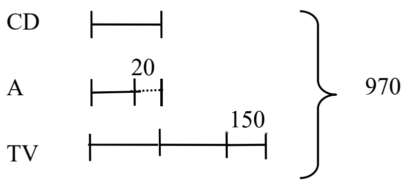
🕮 Aspecte teoretice:

Metoda figurativă (numită și metoda grafică) se aplică acelor probleme care permit reprezentarea prin simboluri (segmente, ovale, cercuri etc.) a mărimilor necunoscute ale problemei şi fixarea într-un desen sau schemă a relaţiilor dintre ele şi a mărimilor date în problemă. Figurile ce servesc la rezolvare nu sunt făcute exact la scară dar ele schematizează enunţul pentru a păstra relaţiile matematice. Metoda figurativă se aplică la câteva tipuri de probleme dar şi la probleme nestandard. Ea poate fi combinată cu alte metode aritmetice ca de exemplu: metoda mersului invers, metoda falsei ipoteze, rezolvarea unor probleme de logică etc. Metoda figurativă are la bază modelarea, paşii urmaţi pentru rezolvarea unei probleme prin această metodă fiind asemănători celor folosiţi la metoda modelării.

Dintre problemele tip specifice acestei metode putem enumera:

- *Aflarea a două numere când se cunoaşte suma şi diferenţa lor.*
- *Aflarea a două numere când se cunoaşte suma (sau diferenţa) lor şi raportul numerelor.*
- *Aflarea a două numere când se cunoaşte suma (sau diferenţa), câtul şi restul împărţirii numărului mai mare la cel mai mic.*
- *Aflarea mai multor mărimi pentru care se cunoaște suma lor și alte dependenţe (de tip aditiv, multiplicativ sau combinat).*
- *Probleme cu mutare de cantităţi, în care se precizează o anumită situaţie iniţială, iar apoi după mutarea unor cantităţi se precizează situaţia finală.*

Etapele rezolvării unei probleme de aritmetică prin metoda figurativă sunt exemplificate pe o problemă în tabelul următor:

Etapele rezolvării unei probleme prin metoda figurativă	*Problema rezolvată:* *La un magazin de produse electrocasnice se vând la pachet un televizor, un CD-player şi un aspirator, în total la preţul de 970 lei. Ştiind că aspiratorul este cu 20 de lei mai ieftin decât CD-player-ul iar televizorul este cu 150 de lei mai scump decât dublul preţului CD-player-ului, să se afle preţul fiecărui obiect electrocasnic.*
1. Se reprezintă fiecare necunoscută printr-un simbol;	Se desenează un segment corespunzător preţului CD player-ului pentru că celelalte preţuri fac referire la acesta. Se notează acest segment cu CD. Se desenează două segmente corespunzătoa-re preţului televizorului (notat TV) şi preţului aspiratorului (notat A) pe baza informaţiilor date în problemă și anume: segmentul A mai scurt decât segmentul CD, iar segmentul TV de două ori mai mare decât segmentul CD și încă un segment mai mic.
2. Fiecare relaţie din textul problemei se schematizează utilizând simbolurile alese, obţinând modelul grafic al problemei;	Se reprezintă pe desen valorile cunoscute și se obţine modelul grafic problemei: 
3. Se fac legături pe model între necunoscute şi datele problemei şi se identifică	Se observă pe desen că dacă la suma totală se adună 20 şi se scade 150 valoarea obţinută va corespunde la 4 segmente egale cu segmentul corespunzător preţului CD-ului. (uneori se

raţionamentul de rezolvare;	utilizează exprimarea: „se egalează necunoscutele la preţul CD player-ului”). Valoarea obţinută se împarte la 4 şi se obţine preţul CD-ului. Apoi se obţin celelalte preţuri.
4. Se face transferul de la raţionamentul intuitiv identificat pe modelul grafic la raţionamentul (logic) de rezolvare a problemei;	Se scriu întrebările și se rezolvă problema: 1. Cât ar fi suma celor trei produse dacă aspiratorul ar costa cât CD-ul, iar televizorul de două ori cât CD-ul? $970+20-150=840$ (lei) 2. De câte ori intră preţul CD-ului în această valoare? De 4 ori. 3. Cât costă CD-ul? 840 : 4 = 210 (lei) 4. Cât costă aspiratorul? $210-20=190$ (lei) 5. Cât costă televizorul? $210\times 2+150=570$ (lei) Răspuns: CD-playerul costă 210 lei, aspiratorul costă190 lei, televizorul costă570 lei
5. Extinderi (se interpretează rezultatul, se dau alte metode de rezolvare, se găseşte un algoritm general de rezolvare etc.).	*Extindere 1.* Se scrie exerciţiul de rezolvare al problemei pentru preţul CD-playerului şi anume (970 + 20 – 150) : 4 *Extindere 2.* Se rezolvă problema printr-o altă metodă, egalând valorile necunoscute la preţul aspiratorului. 1. Cât ar fi suma celor trei produse dacă egalăm mărimile la preţul aspiratorului? 970 – 20 – 150 – 20 – 20 = 760 (lei) 2. De câte ori intră preţul aspiratorului în această valoare? De 4 ori. 3. Cât costă aspiratorul? 760 : 4 = 190 (lei) 4. Cât costă CD-playerul? 190 + 20 = 210 (lei) 5. Cât costă televizorul? 210×2+150=570 (lei)

✏ **Probleme propuse:**

1. Suma a două numere este 22 iar diferenţa lor 14. Să se afle numerele.
2. Suma a două numere este 35 iar raportul lor este 3/4. Să se afle numerele.
3. Diferenţa a două numere este 26 iar raportul lor este 2/3. Să se afle numerele.
4. Suma a două numere este 22. Împărţind numărul mai mare la numărul mai mic se obţine câtul 4 şi restul 2. Să se afle numerele.
5. Diferenţa a două numere este 142. Împărţind numărul mai mare la numărul mai mic se obţine câtul 4 şi restul 2. Să se afle numerele.
6. Suma a două numere este 44, iar unul dintre ele este de patru ori şi jumătate mai mare decât celălalt. Aflaţi numerele.
7. Suma a cinci numere consecutive este 145. Să se determine numerele.
8. Diferenţa a două numere este 30, iar unul dintre ele este de trei ori şi jumătate mai mare decât celălalt. Aflaţi numerele.
9. Dan are cu 39 de timbre mai multe decât Horea. Ştiind că Dan are de 5 ori mai multe timbre decât Horea şi încă 7 în plus aflaţi câte timbre are fiecare copil.
10. Mara şi Andrei au împreună 25 de bomboane. Ştiind că Mara are cu 3 bomboane mai multe decât Andrei aflaţi câte bomboane are fiecare copil.
11. Ana şi Dan au împreună 21 de mere. Ana are de trei ori mai multe mere decât Dan şi încă un măr. Câte mere are fiecare copil?
12. Mara şi Andrei au împreună 33 de lei. Dacă Mara cheltuie 3 lei, ei îi vor rămâne de 4 ori mai mulţi bani decât lui Andrei. Aflaţi câţi lei are fiecare copil.

13. Mara şi Andrei au împreună 36 de lei. Dacă Mara îi dă lui Andrei 6 lei, ei îi vor rămâne de 3 ori mai mulţi bani decât lui Andrei. Aflaţi câţi lei a avut la început fiecare copil.

14. Ana, Maria și Dana au împreună 240 de scoici. După ce Ana îi dă Mariei 15 scoici, iar Danei 35 de scoici, Maria are dublul scoicilor Anei, iar Dana triplul scoicilor Anei. Câte scoici a avut fiecare la început?

15. Pentru o serbare s-au cumpărat 10 m de panglică tricoloră din care trebuiau să se confecţioneze 10 cordoane, 5 pentru fete și 5 pentru băieţi. Știind că o panglică pentru fete este cu 20 cm mai scurtă decât una pentru băieţi, să se afle ce lungime are un cordon pentru fete, respectiv unul pentru băieţi.

16. Într-o curte sunt raţe şi purcei, în total 13 capete şi 32 de picioare. Câte raţe şi câţi purcei sunt?

17. Nikolay numără toate colegele și, separat, toţi colegii din clasă. El observă că numărul colegelor este de două ori mai mare decât numărul colegilor săi. Care din următoarele numere poate reprezenta numărul elevilor din clasa lui?
a) 30; b) 20; c) 24; d) 25 ; e) 29.
(Concursul *Cangurul*, 2012)

18. Într-o clasă sunt 20 de copii. După ce pleacă 2 fete şi vin 2 băieţi numărul fetelor este egal cu numărul băieţilor. Câte fete şi câţi băieţi erau la început în clasă?

19. Un filtru de cafea, un televizor şi un CD-player costă împreună 1175 lei. Televizorul costă cu 70 lei mai mult decât CD-playerul, iar filtrul de cafea costă cu 50 lei mai puţin decât CD-playerul. Cât costă fiecare produs?

20. Într-o bibliotecă sunt 560 de manuale de Matematică, Ştiinţe şi Limba engleză. Manualele de Limba engleză sunt cu 253 mai puţine decât cele de Matematică, iar cele de Ştiinţe sunt cu 22 mai multe decât cele de Limba engleză. Câte manuale sunt de fiecare fel?

21. Într-o clasă sunt 25 de copii. După ce pleacă 1 băiat şi vin 4 fete numărul fetelor este de 3 ori mai mare decât numărul băieţilor. Câte fete şi câţi băieţi erau la început în clasă?

22. Trei baloane costă cu 12 cenţi mai mult decât un balon. Cât costă un balon?
    a) 4 cenţi; b) 5 cenţi; c) 6 cenţi; d) 8 cenţi; e) 10 cenţi.
    (Concursul *Cangurul*, 2012)

23. Ana şi Mihai au împreună 163 de lei. După ce Ana cheltuie 3 lei, iar Mihai primeşte 15 lei, Mihai va avea de 6 ori mai mulţi bani decât Ana. Câţi bani avea la început fiecare copil?

24. Un număr este cu 12 mai mare decât alt număr. Triplul numărului mai mic adunat cu dublul numărului mai mare este 164. Să se afle numerele.

25. Cineva îl întreabă pe Ionel câţi ani are. El răspunde: „Când tata avea 31 de ani, eu aveam 7 ani. Acum tata este de două ori mai în vârstă decât mine". Ce vârstă are Ionel?

26. Ana şi Maria au împreună 100 lei. Ştiind că Ana are 2/3 din suma de bani a Mariei aflaţi câţi lei are fiecare fetiţă.

27. Trei elevi au o sumă de bani. Primul are 2/3 din cât are al doilea, al doilea are 3/4 din cât are al treilea. Ei fac o excursie în care cheltuiesc 2187 lei, fiecare contribuind egal. Știind că primul copil a rămas cu jumătate din banii cu care a plecat, aflaţi câţi bani avea fiecare copil la început.

28. Dacă pe fiecare bancă dintr-un ateneu se aşează câte 12 persoane, rămân 4 bănci libere, iar dacă pe fiecare bancă se aşează câte 10 persoane, rămân 196 de persoane fără loc. Câte bănci şi câte persoane sunt?

29. Dacă se aşează câte un elev într-o bancă, rămân 9 elevi fără loc, dacă se aşează câte 2 elevi într-o bancă rămân 3 bănci libere. Câţi elevi şi câte bănci sunt?

30. O cantitate de mere trebuie pusă în lăzi. Dacă s-ar pune câte 5 kg de mere într-o ladă ar rămâne 25 kg de mere. Dacă s-ar pune câte 8 kg de mere într-o ladă ar mai încăpea 20 kg de mere. Câte lăzi şi câte kg de mere sunt?

31. Pentru o masă festivă se aduc trandafiri și vaze. Dacă se pun câte 3 trandafiri într-o vază atunci rămân 15 trandafiri. Dacă se așează 5 trandafiri într-o vază, atunci rămân 11 vaze libere.

32. Într-un vas sunt de 5 ori mai multe prune decât mere. Dacă se mai adaugă în vas 2 mere şi se scot 14 prune, rămân în vas de 3 ori mai multe prune decât mere. Câte prune şi câte mere au fost?

33. Într-un vas cu fructe sunt de 3 ori mai multe mere decât pere. Doi copii iau fiecare câte un măr şi o pară. Rămân în vas de 4 ori mai multe mere decât pere. Câte fructe de fiecare fel erau iniţial în vas?

34. Câţi elevi sunt într-o clasă, ştiind că, dacă se formează grupe din câte un băiat şi o fată, rămân 4 fete, iar dacă se formează grupe din câte 2 fete şi 1 băiat rămân 3 băieţi?

35. Care sunt cele patru părţi în care trebuie să se împartă numărul 960 astfel încât partea a doua să fie de 4 ori mai mare decât prima, a treia egală cu suma primelor două, iar a patra de două ori cât a treia.

36. Andrei are în penarul său 15 obiecte de scris: stilouri, pixuri, creioane şi carioci. Stilourile sunt jumătate din numărul pixurilor, acestea cu 2 mai puţine decât creioanele, iar acestea de 2 ori mai puţine decât cariocile. Câte obiecte are Andrei din fiecare fel?

37. Într-o tabără numărul băieţilor este de 3 ori mai mare decât numărul fetelor. Când din tabără au plecat 4 băieţi şi 4 fete, numărul băieţilor a devenit de 4 ori mai mare decât al fetelor. Câţi băieţi şi câte fete erau la început în tabără?

38. Dacă aș cheltui jumătate din suma de bani pe care o am și încă 15 lei aş rămâne cu un sfert din suma de bani iniţială. Câţi bani am?

3.2. Metoda falsei ipoteze

🕮 Aspecte teoretice:

Metoda falsei ipoteze se foloseşte la problemele în care se cunoaşte valoarea unitară a două sau mai multe elemente precum și cantitatea totală a acestora și se cere aflarea numărului de elemente de fiecare fel.

Algebric acest tip de probleme conduc la rezolvarea unui sistem liniar de *n* ecuaţii cu *n* necunoscute, care pentru n = 2 ia următoarea formă:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+\ y=\ T} \\ \boldsymbol{mx+\ ny=C} \end{cases}, \boldsymbol{unde\ m,n,T,C} \in \boldsymbol{N};\ \ \boldsymbol{x}=?\,, \boldsymbol{y}=?$$

Enunţul poate avea una din formele următoare:

- *În T vase încap C litri de lichid. Vasele sunt de două tipuri, cu capacitatea de m litri, respectiv n litri. Câte vase sunt de fiecare tip?*
- *Se cumpără T obiecte de două tipuri plătindu-se C lei. Un obiect de primul tip costă m lei, iar unul de al doilea tip n lei. Câte obiecte sunt de fiecare tip?*
- *Într-o curte sunt T capete de animale şi păsări şi C picioare. Câte animale şi câte păsări sunt în curte?*
- *Într-un bloc sunt apartamente de m şi respectiv n camere în total C camere şi T apartamente. Câte apartamente de fiecare tip sunt?*

Rezolvarea prin falsa ipoteză nu urmează calea algebrică uzuală de rezolvare a sistemelor liniare prin reducere sau substituţie ci se bazează pe o ipoteză (presupunere) asupra unei (sau mai multor) mărimi necunoscute, de unde se deduc anumite nepotriviri ce vor conduce la rezolvarea problemei. A nu se confunda metoda falsei ipoteze, care e o metodă bazată pe raţionament, cu metoda încercărilor și a erorilor care e o metodă empirică de ghicire a rezultatului.

Etapele rezolvării unei probleme de aritmetică prin metoda falsei ipoteze sunt exemplificate pe o problemă în tabelul următor:

Etapele rezolvării unei probleme prin metoda falsei ipoteze	*Problema rezolvată:* *În 10 sticle încap 36 l de apă. Ştiind că sticlele au capacităţile de 3l respectiv 5 l, aflaţi câte damigene sunt de fiecare fel?*
1. Se face o presupunere asupra unei (unor) mărimi necunoscute din problemă atribuindu-i o valoare existentă în problemă sau arbitrară	Presupunem că toate sticlele au capacitatea de 3 *l*.
2. Cu aceste valori se face verificarea enunţului şi se ajunge la o diferenţă între rezultatul căutat şi cel presupus	Atunci cantitatea totală de apă este: 10 × 3 *l* = 30 *l*. Diferenţa dintre cantitatea reală și cea obţinută este de 36 – 30 = 6 *(l)*
3. Pe baza nepotrivirilor observate se trag diferite concluzii care vor duce la aflarea rezultatului corect	Cei 6 *l* lipsă se vor obţine completând câteva sticle de 3 *l* cu încă 2 *l*. Pentru a afla câte damigene de 3 *l* mai trebuie completate vom efectua 6:2=3 sticle. Aşadar vor fi 3 sticle de 5 *l* şi 7 sticle de 3 *l*.

✐ **Probleme propuse:**

1. La o cantină se cumpără făină şi zahăr în total 34 kg plătindu-se 82 lei. Ştiind că 1 kg de făină costă 2 lei, iar 1 kg de zahăr 3 lei, aflaţi câte kg de zahăr, respectiv făină s-au cumpărat?
2. 18 caiete de 48 de file şi respectiv 200 de file au împreună 2080 de file. Câte caiete sunt de fiecare fel?

3. Într-o curte sunt raţe şi purcei în total 13 capete şi 32 picioare. Câte raţe şi câţi purcei sunt în curte?
4. Într-o curte sunt 100 găini şi oi care au în total 364 de picioare. Câte animale sunt de fiecare fel?
5. Într-o curte sunt 17 găini, căţei și vite care au împreună 48 de picioare și 8 coarne. Câte animale sunt de fiecare fel?
6. În clasele a V-a şi a VIII-a ale unei şcoli sunt numai elevi de 10 ani şi respectiv 14 ani. Ştiind că în total sunt 268 elevi, iar suma vârstelor este 3000 ani, câţi elevi sunt în fiecare clasă?
7. Pentru construirea unui pod s-au cumpărat grinzi de brad şi de stejar, în total 16 grinzi cântărind 1070 kg. Ştiind că o grindă de stejar are 80 kg, una de brad 50 kg, câte grinzi au fost de brad şi câte de stejar?
8. Într-un bloc sunt apartamente de 2 şi 4 camere în total 80 camere şi 32 apartamente. Câte apartamente de fiecare fel sunt?
9. Într-un bloc sunt apartamente de o cameră, 2 și 4 camere, în total 32 de apartamente și 64 de camere. Știind că sunt tot atâtea apartamente de 2 camare câte apartamente cu 4 camere, să se afle câte apartamente de fiecare fel sunt.
10. Întro cofetărie sunt 15 mese. La unele pot să stea 6 persoane, la altele doar 4. În cofetărie încap în total 76 de persoane. Câte mese de fiecare fel sunt?
11. La un concurs de matematică cu 20 de probleme pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare problemă rezolvată greşit se scad 2 puncte. Mihai a obţinut la concurs 72 puncte. Câte probleme a rezolvat corect și câte a greșit?
12. Dintr-o livadă s-au cules 1920 de kg de căpşuni şi cireşe în 270 de lădiţe.Căpşunile au fost puse câte 6 kg într-o lădiţă, iar cireşele câte 8 kg. Căpşunile s-au vândut cu 8 lei/kg iar cireşele cu 6 lei/kg. Ce sumă s-a încasat?

13. Un culegător de mere umple 30 lăzi de câte 10 kg şi 20 kg în 4 ore şi 10 minute. O ladă de 10 kg este umplută în 5 minute, iar una de 20 kg în 10 minute. Câte lăzi de 10 kg şi câte de 20 kg au fost umplute de acel culegător?

14. Într-o urnă sunt bile albe şi negre. Dacă se extrage din urnă o bilă albă se obţin 3 puncte, iar dacă extragem o bilă neagră se obţin 5 puncte. Un copil a extras 13 bile şi a obţinut 49 de puncte. Câte bile albe şi câte bile negre a extras copilul din acea urnă?

15. O ciocolată mare costă 4 cenţi, una medie 2 cenţi şi una mică 1 cent. Kangaroo a cumpărat 10 ciocolate, cel puţin una din fiecare şi a plătit 16 cenţi. Câte ciocolate mari a cumpărat?
    a) 5; b) 4; c) 3; d) 2; e) 1.

(Concursul *Cangurul*, 2003)

16. În portofelul lui John sunt exact 13 monede, dar numai monede de 5 cenţi şi 10 cenţi. Care din următoarele nu poate fi suma de bani din portofelul lui John?
    a) 80 cenţi; b) 60 cenţi; c) 70 cenţi; d) 115 cenţi; e) 125 cenţi.

(Concursul *Cangurul*, 2011)

17. Pe tablă sunt desenate triunghiuri și dreptunghiuri care nu se ating. În total sunt exact 17 vârfuri. Câte triunghiuri sunt pe tablă?
    a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5.

(Concursul *Cangurul*, 2002)

3.3. Metoda reducerii la unitate

🕮 Aspecte teoretice:

Metoda reducerii la unitate se aplică acelor probleme în care pentru anumite valori date mărimilor este cunoscută o valoare totală și se cere aflarea unei valori totale pentru alte valori date mărimilor.

Problemele tip care se pot rezolva prin metoda reducerii la unitate sunt probleme în care avem mărimi independente (măsurabile

prin unităţi de măsură diferite) direct sau invers proporţionale (deci care depind unele de altele multiplicativ).

O problemă cu 2 mărimi care se rezolvă prin metoda reducerii la unitate poate fi scrisă schematic astfel:

M_1 elemente de tip 1 ... N_1 elemente de tip 2 ... P (total)

M_2 elemente de tip 1 ... N_2 elemente de tip 2 ... ?(total)

Metoda reducerii la unitate este o metodă de rezolvare alternativă la regula de trei simplă și regula de trei compusă. Spre deosebire de acele metode care necesită cunoştinţe mai avansate de matematică (rapoarte și proporţii, mărimi direct și invers proporţionale) metoda reducerii la unitate este aplicabilă și în învăţământul primar, necesitând doar calcule ce vizează înmulţirea și împărţirea numerelor naturale.

Etapele rezolvării unei probleme de aritmetică prin metoda reducerii la unitate sunt exemplificate pe o problemă în tabelul următor:

Etapele rezolvării unei probleme prin metoda reducerii la unitate	*Problema rezolvată:* *12 elevi rezolvă timp de 3 zile în total 108 de probleme de matematică. Câte probleme de matematică rezolvă 30 de elevi timp de 4 zile, știind că toţi elevii rezolvă același număr de probleme și în același ritm?*
1. Se scriu schematic datele problemei	12 elevi ... 3 zile ... 108 probleme 30 elevi ... 4 zile ... ? probleme
2. Se reduc la unitate pe rând mărimile care se modifică în cerinţă, calculând totodată valoarea necunoscută.	Se reduc pe rând la unitate numărul de elevi și zilele, calculând în același timp numărul de probleme. 1 elev ... 3 zile ... 108 : 12= 9 probleme (pentru că scăzând numărul de elevi de 12 ori, scade și numărul de probleme rezolvate tot de 12 ori- numărul de

Observaţie. Se va ţine cont în ce fel valoarea necunoscută se modifică prin reducerea la unitate a valorilor cunoscute, şi anume prin înmulţire sau împărţire (în funcţie de cum variază - direct proporţional sau invers proporţional faţă de valorile cunoscute).	elevi și numărul de probleme sunt mărimi direct proporţionale) 1 elev ... 1 zi ... 9: 3 = 3 probleme (pentru că scăzând numărul de zile de 3 ori, scade și numărul de probleme rezolvate tot de 3 ori- numărul de zile și numărul de probleme sunt mărimi direct proporţionale)
3. Se aduc pe rând mărimile la valorile cerute, calculând totodată valoarea necunoscută.	30 elevi ... 1 zi ... 3 × 30 = 90 probleme (pentru că mărind numărul de elevi de 30 ori, crește și numărul de probleme rezolvate tot de 30 ori) 30 elevi ... 4 zile ... 90 × 4 = 360 probleme (pentru că mărind numărul de zile de 4 ori, crește și numărul de probleme rezolvate tot de 4 ori) Răspuns: 360 de probleme

✏ **Probleme propuse:**

1. Cinci muncitori pot termina o lucrare în 60 zile, lucrând câte 8 ore pe zi. În câte zile vor termina aceeaşi lucrare 12 muncitori care lucrează câte 10 ore pe zi?
2. În 7 lăzi de se găsesc 35 kg de căpşuni. Câte kg de căpşuni se găsesc în 11 lăzi?
3. O brutărie a primit 60 de saci de făină, cântărind 125 kg fiecare, având preţul de 2 lei/kg. Cât a încasat brutăria la vânzarea pâinii fabricate, dacă din 3 kg de făină ies 4 kg de pâine şi dacă pâinea se vinde cu 2 lei/kg.

4. Valoarea manualelor primite în două clase, una cu 28 elevi, alta cu 27 elevi, este de 1100 lei. Care este valoarea în lei a manualelor primite în fiecare clasă?
5. În 15 ore un biciclist parcurge o distanţă de 270 km, iar un autobuz 795 km. Care parcurge în 7 ore mai mult şi cu cât?
6. La o cantină sunt necesare 275 pâini pentru o perioadă de 11 zile, la 25 persoane. Câtă pâine va fi necesară pentru 32 persoane în 6 zile?
7. O echipă de 8 muncitori termină de săpat un şanţ în 12 zile. După ce echipa a lucrat 3 zile, câţi muncitori mai trebuie angajaţi pentru ca săpatul şanţului să se termine în următoarele 4 zile?
8. Trei furnale au de prelucrat 36000 t minereu de fier. Ştiind că primul furnal ar prelucra tot minereul în 60 zile, al doilea în 90 zile şi al treilea în 45 zile, aflaţi în câte zile vor prelucra tot minereul cele trei furnale şi ce cantitate de minereu a prelucrat fiecare furnal?
9. Câte fulare se pot cumpăra în locul unui palton, ştiind că un palton costă cât 10 cămăşi, 5 cămăşi cât un costum, 2 costume cât 7 perechi de pantofi, 10 perechi de pantofi cât 100 fulare?
10. Un ţăran vinde 3 curci, 3 gâşte şi 3 găini cu 270 lei. Cu cât a vândut fiecare pasăre în parte, dacă 2 curci costă cât 3 gâşte şi o gâscă cât 2 găini?
11. Trei robinete având debitul de 4 l/min. vor umple un rezervor în 5 ore. În câte ore se umple rezervorul deschizând 4 robinete şi crescând debitul la 5 l/min?
12. O fermă de animale are o provizie de fân pentru iarnă cu care să-şi hrănească cele 30 de vaci timp de 42 de zile cu câte 4 kg de fân pe zi. Dacă va vinde a patra parte de fân şi două vaci, iar vacilor rămase le va da câte 5 kg de fân pe zi, atunci cât timp va putea să le hrănească, cu provizia de fân rămasă?
13. O echipă de 9 zidari lucrând câte 6 ore pe zi, în 12 zile a făcut un zid lung de 24 m, lat de 0,8 m şi înalt de 2,7 m. În câte zile o echipă

de 10 zidari, lucrând cate 5 ore pe zi ar termina un zid lung de 18 m, lat de 0,75 m şi înalt de 4 m?

14. O echipă de 5 bărbaţi şi 7 femei pot termina o lucrare în 31 zile. În câte zile, o echipă de 7 bărbaţi şi 5 femei, va putea termina o altă lucrare de două ori mai mare decât prima, ştiind că munca a 2 bărbaţi este egală cu munca a 3 femei?
15. 5 copii mănâncă 5 mere în 5 minute. În cât timp mânâncă un copil un măr?
16. 5 pisici mănâncă 5 șoareci în 5 minute. De câte pisici este nevoie pentru a mânca 100 de șoareci în 100 de minute?
17. O găină și jumătate face un ou și jumătate într-o zi și jumătate. Câte ouă fac 12 găini în 12 zile?

3.4. Metoda comparației și a înlocuirii (de mărimi)

🕮 Aspecte teoretice:

Metoda comparaţiei (sau a aducerii la același termen de comparaţie) se folosește la problemele cu două sau mai multe necunoscute între care se pot stabili tot atâtea relaţii câte necunoscute sunt și se cere aflarea acestor necunoscute. Algebric acest tip de probleme conduc la rezolvarea unui sistem liniar de *n* ecuaţii cu *n* necunoscute prin metoda reducerii (a se vedea mai jos etapele rezolvării).

O problemă tip cu 2 necunoscute care se rezolvă prin metoda comparaţiei poate fi scrisă schematic astfel:

M_1 obiecte de tip 1 ... N_1 obiecte de tip 2 ... P_1 (elemente)

$\underline{M_2 \text{ obiecte de tip 1 ... } N_2 \text{ obiecte de tip 2 ... } P_2 \text{ (elemente)}}$

1 obiect de tip 1 ... ? (elemente)

1 obiect de tip 2 ... ? (elemente)

sau algebric:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M_1x + N_1y = P_1} \\ \boldsymbol{M_2x + N_2y = P_2} \end{cases}, \boldsymbol{unde} \quad \boldsymbol{M_1, M_2, N_1, N_2 \in N}; \quad \boldsymbol{x} = ?, \boldsymbol{y} = ?$$

Dacă în problemă se dau relaţii de dependenţă directă între două mărimi (adică o mărime este de atâtea ori sau cu atât mai mult/mai puţin decât altă mărime), atunci metoda comparaţiei va fi combinată şi cu înlocuirea de mărimi (eliminare prin înlocuire), care e un caz particular al rezolvării algebrice prin substituţie a sistemelor liniare de ecuaţii.

O problemă tip cu 2 necunoscute care se rezolvă prin metoda comparaţiei şi a înlocuirii poate fi scrisă schematic astfel:

M_1 obiecte de tip 1 ... N_1 obiecte de tip 2 ... P_1 (elemente)

<u>M_2 obiecte de tip 1 = N_2 obiecte de tip 2 ± C</u>

1 obiect de tip 1 ... ? (elemente)

1 obiect de tip 2 ... ? (elemente)

sau algebric:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M_1x + N_1y = P_1} \\ \boldsymbol{M_2x = N_2y \pm C} \end{cases}, \boldsymbol{unde}\ \boldsymbol{M_1, M_2, N_1, N_2, C \in N}; \quad \boldsymbol{x} = ?, \boldsymbol{y} = ?$$

Etapele rezolvării unei probleme de aritmetică prin metoda comparaţiei sunt exemplificate pe o problemă în cele ce urmează:

Etapele rezolvăriiunei probleme prin metoda comparaţiei şi a înlocuirii	*Problemă rezolvată:* *În 8 cutii şi 5 pungi se găsesc în total 155 de bomboane. În 10 cutii şi 3 pungi se găsesc 145 de bomboane. Câte bomboane se găsesc într-o cutie şi câte într-o pungă?*
1. Se scriu schematic datele problemei.	8 cutii ... 5 pungi ... 155 bomboane <u>10 cutii ... 3 pungi ... 145 bomboane</u> 1 cutie ... ? bomboane 1 pungă ... ? bomboane

2. Se compară relaţiile dintre mărimi și se identifică mărimea (sau mărimile) care va fi eliminată.	Analizând datele problemei constatăm că nu are importanţă (în ceea ce privește dificultatea) care necunoscută va fi eliminată. Ne decidem să eliminăm „numărul de cutii”.
3. Se transformă relaţiile (prin înmulţiri, adunări etc.) pentru a obţine acelaşi termen de comparaţie (aceleaşi mărimi pentru două sau mai multe necunoscute).	Se înmulţesc relaţiile, prima cu 5, a doua cu 4 pentru a egala numărul de cutii și obţinem: 40 cutii ... 25 pungi ... 775 bomboane <u>40 cutii ... 12 pungi ... 580 bomboane</u>
4. Prin reducere sau înlocuire se elimină una (sau mai multe mărimile necunoscute) în aşa fel încât să rămână o singură necunoscută.	Se scad cele două relaţii și obţinem: 0 cutii ... 13 pungi ... 195 bomboane
5. Se detemină necunoscuta rămasă.	1 pungă ... 195 : 13 = 15 bomboane
6. Se determină celelalte necunoscute prin înlocuirea valorii cunoscute într-una (sau pentru n>2 în *n-1*) din relaţii.	8 cutii ... 5 × 15= 75 bomboane ... 155 bomboane 8 cutii ... 155 – 75 = 80 bomboane 1 cutie ... 80 : 8 = 10 bomboane Răspuns: 1 cutie are 10 bomboane, 1 pungă are 15 bomboane

✐ **Probleme propuse:**

1. Pentru o cantină şcolară s-au cumpărat o dată 7 kg de zahăr şi 2 kg de ceai în valoare de 41 lei. În altă zi s-au cumpărat cu acelaşi preţ

3 kg de zahăr şi 2 kg de ceai în valoare de 29 lei. Cât costă 1 kg de zahăr şi cât costă 1 kg de ceai?

2. În 12 sticle și 3 damigene sunt 39 l de apă, iar în 8 sticle și 6 damigene sunt 46 l de apă. Câţi l de apă sunt într-o sticlă, respectiv într-o damigeană?

3. La un magazin cu suma de 66 lei se pot cumpăra 9 kg de orez şi 6 kg de făină. Cât costă 1 kg de orez şi cât costă 1 kg de făină, dacă 1 kg de orez şi 1 kg de făină costă în total 8 lei?

4. La o farmacie s-au adus 9 damigene şi 8 bidoane cu parafină în cantitate totală de 172 litri. Altă dată s-au adus 6 damigene şi 9 bidoane cu parafină în cantitate totală de 144 litri. Ce cantitate de parafină conţine o damigeană şi ce cantitate conţine un bidon?

5. O gospodină a cumpărat 5 kg de mere, 4 kg de struguri şi 6 kg de prune plătind 52 lei. A doua oară a plătit 50 lei pentru 4 kg de mere, 5 kg de struguri şi 4 kg de prune, iar a treia oară pentru 9 kg de mere, 9 kg de struguri şi 5 kg de prune a plătit 87 lei. Cât costă 1 kg din fiecare, dacă preţurile au fost aceleaşi de fiecare dată?

6. 37 m de pânză şi 25 m de mătase costă 1944 lei. Cât costă 1 metru din fiecare material, dacă mătasea este de 5 ori mai scumpă decât pânza?

7. Pentru 5 kg de căpșuni și 3 kg de mere o gospodină a plătit 42 de lei. Știind că 2 kg de căpșuni costă cât 3 kg de mere, cât costă un kg din fiecare fel de fructe?

8. Pentru 7 kg de lămâi şi 9 kg de portocale s-au plătit 73 lei. Cât costă 1 kg de lămâi şi cât costă 1 kg de portocale ştiind că 1 kg de portocale este mai scump cu 1 leu decât unul de lămâi?

9. Pentru o serbare s-au cumpărat 30 de perechi de pantofi și 24 de costume naţionale plătindu-se 7440 de lei. Înainte de serbare 4 elevi s-au retras și ca urmare 4 perechi de pantofi au fost returnaţi. Știind că 3 perechi de pantofi costă cu 40 de lei mai mult decât 2 costume populare, câţi lei s-au recuperat?

10. La un magazin se vând la promoţie 3 cutii de bomboane, 2 pachete de biscuiţi și 4 pachete de napolitane cu 52 de lei. Știind că 3 pachete de biscuiţi și 2 de napolitane costă 22 lei, iar un pachet de bomboane costă cât unul de biscuiţi, aflaţi câţi lei costă un pachet din fiecare produs.
11. La un magazin pentru un costum, o pălărie şi o pereche de pantofi s-au plătit 430 lei. Costumul este de 2 ori mai scump decât pantofii, iar pălăria cu 50 lei mai ieftină decât aceştia. Cât costă fiecare?
12. Un ţăran vinde la mere, pere și prune. Întrebat cât costă un kg din fiecare fel de fructe, ţăranul răspunde: "Dau 2 kg de mere, 3 kg de pere și 5 kg de prune cu 34 de lei. 3 kg de mere costă cât 2 kg de prune, iar kilogramul de pere e cu 2 lei mai scump decât kilogramul de prune". Cât costă un kg din fiecare fel de fructe?

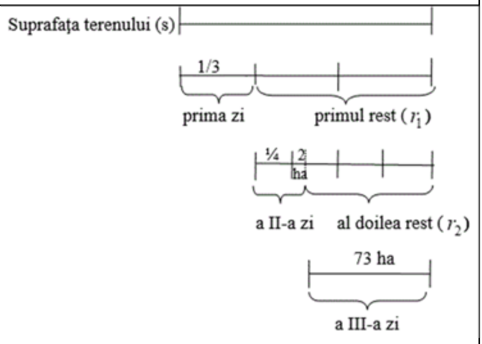
3.5. Metoda mersului invers

🕮 Aspecte teoretice:

Problemele care se rezolvă prin această metodă pot fi recunoscute cu uşurinţă datorită particularităţilor enunţului și anume: la începutul enunţului apare valoare necunoscută care se cere a fi aflată, iar în urma unor acţiuni intermediare asupra valorii necunoscute, la sfârşitul enunţului problemei se dă o valoare cunoscută.

Rezolvarea problemelor de acest tip se face folosind informaţiile din problemă de la sfârşitul enunţului spre început. Rezultatul obţinut poate fi verificat prin înlocuirea lui în textul problemei și efectuarea calculelor în ordinea indicată în enunţ. Uneori rezolvarea acestor probleme se face mai uşor dacă se foloseşte şi un model grafic al problemei, astfel metoda mersului invers fiind uneori combinată cu cea figurativă. Multe astfel de probleme solicită cunoştinţe despre reprezentarea fracţiilor, aflarea unei fracţii dintr-un întreg şi a unui întreg când se cunoaşte o fracţie din el.

Etapele rezolvării unei probleme de aritmetică prin metoda mersului invers sunt exemplificate pe două probleme mai jos:

Etapele rezolvării unei probleme prin metoda mersului invers	*Problema rezolvată 1:* *Un teren se ară în trei zile astfel: în prima zi o treime din el, a doua zi un sfert din rest şi încă 2 ha şi în a treia zi ultimele 73 ha. Câte ha are terenul şi câte ha s-au arat în fiecare zi?*
1. Se identifică tipul problemei: problemă care se rezolvă prin punere în ecuaţie sau problemă care se rezolvă cu suport grafic.	Problema se rezolvă cu suport grafic întrucât datele problemei nu pot fi puse în ecuaţie cu ajutorul cunoştinţelor de matematică din învăţământul primar.
2. Se realizează schematizarea problemei și anume se scrie ecuaţia sau se realizează reprezentarea grafică a problemei.	
3. Se rezolvă problema pornind de la ultima informaţie.	Se află pe rând resturile intermediare de la ultima zi spre prima. - Câte ha reprezintă ¾ din primul rest? 73 + 2 = 75 (ha) - Cât este primul rest? 75 : 3 × 4 = 100 (ha) - Câte ha s-au arat în a doua zi? 100 : 4 + 2 = 27(ha)

	- Câte ha sau arat în prima zi? 100 : 2 = 50 (ha) - Câte ha are terenul ? 50 + 100 = 150 (ha) Răspuns: 150 ha
4. Se verifică rezultatul obţinut.	*Verificare 1:* 50 + 27 + 73 = 150 (ha)
	Verificare 2: Înlocuim valoarea aflată, 150 ha, în textul problemei şi facem calculele. În prima zi se ară 50 ha şi rămân ca rest 100 ha. A doua zi se ară 25+2=27 (ha) şi rămân ca rest 100-27=73 (ha), valoare care coincide cu cea dată în problemă, ceea ce confirmă corectitudinea valorii aflate.

Etapele rezolvării prin metoda mersului invers	*Problema rezolvată 2 :* *Maria o întreabă pe bunica sa ce vârstă are. Bunica răspunde: "Dacă împart vârsta mea la 6 și rezultatul îl adun cu 2018, iar rezultatul îl triplez și îl micșorez cu cel mai mic număr de patru cifre diferite și obţin 5067". Ce vârstă are bunica?*
1. Se identifică tipul problemei: problemă care se rezolvă prin punere în ecuaţie sau problemă care se rezolvă cu suport grafic.	Problema se rezolvă cu prin punere în ecuaţie.

2. Se realizează schematizarea problemei și anume se scrie ecuaţia sau se realizează reprezentarea grafică a problemei.	Se notează vârsta bunicii cu n. Se transpun matematic informaţiile din textul problemei și se scrie ecuaţia corespunzătoare: $(n : 6 + 2018) \times 3 - 1023 = 5067$
3. Se rezolvă problema pornind de la informaţia finală.	Se notează ordinea efectuării operaţiilor dacă numărul n s-ar cunoaște. $(n \overset{①}{:} 6 \overset{②}{+} 2018) \overset{③}{\times} 3 \overset{④}{-} 1023 = 5067$ Se elimină operaţiile în ordinea inversă de la operaţia 4 spre 1. Se elimină operaţia 4: $(n : 6 + 2018) \times 3 = 5067 + 1023$ $(n : 6 + 2018) \times 3 = 6090$ Se elimină operaţia 3: $n : 6 + 2018 = 6090 : 3$ $n : 6 + 2018 = 2030$ Se elimină operaţia 2: $n : 6 = 2030 - 2018$ $n : 6 = 12$ Se află necunoscuta: $n = 72$
4. Se verifică rezultatul obţinut.	*Verificare:* Înlocuim valoarea aflată 72 în textul problemei şi facem calculele: $(72 : 6 + 2018) \times 3 - 1023 =$ $(12 + 2018) \times 3 - 1023 =$ $2030 \times 3 - 1023 = 6090 - 1023 =$ 5037

✏ Probleme propuse:

1. Pentru a prepara o casă s-au folosit: ciment, nisip de 2 ori mai mult, pietriş cu 20 kg mai puţin decât nisip, var cu 30 kg mai puţin decât pietriş, adică 150 kg. Cât ciment s-a folosit?
2. Un ţăran vinde cireşe la trei cumpărători. Primului îi vinde jumătate din cantitate şi încă 1 kg, celui de al doilea jumătate din cantitatea rămasă şi încă 1 kg, iar celui de al treilea jumătate din cantitatea rămasă după plecarea celui de al doilea cumpărător şi încă 1 kg. Ştiind că i-au rămas 2 kg de cireşe să se afle câte kg de cireşe a avut ţăranul?
3. Un ţăran dă fiilor săi toate oile pe care le are astfel: Primul fiu ia jumătate din numărul oilor plus una, al doilea fiu jumătate din restul oilor plus una, al treilea fiu ia jumătate din ceea ce a rămas plus o oaie, iar ultimul fiu ia ultima oaie rămasă. Câte oi a avut ţăranul?
4. O clasă de elevi merg în excursie cu autocarul din orașul natal A spre orașul B. În prima zi parcurg jumătate din drumul până la destinaţie și încă 17 km. A doua zi parcurg cu 8 km mai puţin decât două treimi din restul distanţei până la destinaţie. A treia zi parcurg restul de 18 km până la orașul B. Câţi km au făcut cu autocarul de la plecare până la întoarcere?
5. Un casier fiind întrebat cât a încasat într-o zi a răspuns: dacă aş mai fi încasat încă un sfert din cât am încasat şi încă 500 lei, atunci aş fi încasat 5500 lei. Cât a încasat casierul în ziua respectivă?
6. Aflaţi necunoscuta x din egalitate şi apoi verificaţi rezultatul găsit:

   a) $6 \times [4 + (10 + 3 \times x) : 11] - 33 = 3$

   b) $5 \times [3 + (11 + 5 \times x) : 9] - 32 =$

   c) $1 + \{3 \times [4 + 5 \times (6 - x)] : 7\} : 8 = 2$

   d) $30 : (24 - x) + 20] : 5 = 7$

   e) $40 - 6 \times [4 + (28 - 3 \times x) : 11] = 4$

7. M-am gândit la un număr din care am scăzut 25, am înmulţit diferenţa cu 2 şi am obţinut 276. La ce număr m-am gândit?

8. Mă gândesc la un număr. Îl măresc cu 1/5 din 205. Rezultatul obţinut îl scad din 2000. Micşorez rezultatul obţinut cu 42. Noul rezultat îl micşorez de 100 de ori şi obţin în final 19. La ce număr m-am gândit?

9. Mă gândesc la un număr. Îl înmulţesc cu 100, îi adaug 999 și am obţinut cel mai mare număr de 4 cifre. La ce număr m-am gândit?
   a) 900; b) 9; c) 90; d) 99; e) 45.
   (Concursul *Lumina Math*, 2008, cl. a IV-a)

10. Un ciclist parcurge un traseu în 4 etape. În prima etapă parcurge jumătate din traseu plus 5 km, în a doua etapă jumătate din restul traseului plus 5 km, în a treia etapă jumătate din noul rest plus 5 km, iar în a patra etapă 5 km. Care este lungimea drumului?

11. La un concurs de matematică s-au susţinut 3 baraje: după primul baraj au fost eliminaţi jumătate din participanţi şi un elev a renunţat; după al doilea au fost eliminaţi o şeptime din cei rămaşi şi alţi 4 au renunţat, iar după al teilea baraj au fost eliminaţi jumătate din cei rămaşi şi încă 8. Ştiind că după cele trei baraje au rămas 11 elevi, aflaţi câţi elevi au fost înscrişi iniţial la concurs.

12. Pe un teren agricol a fost plantată floarea soarelui pe un sfert din el plus 30 ha, iar grâu pe $\frac{5}{9}$ din rest şi încă 120 ha. Să se afle câte hectare are întregul teren agricol.

13. Cineva are o sumă de bani din care cheltuieşte o dată $\frac{2}{3}$ şi apoi $\frac{3}{4}$ din rest, $\frac{4}{5}$ din noul rest şi $\frac{5}{6}$ din noul rest, în felul acesta rămânându-i 1 leu. Ce sumă de bani a avut la început?

14. O persoană pleacă de acasă cu o sumă de bani. La intrarea în primul magazin cumpără ghiocei de 1 leu, în magazin cheltuieşte jumătate din suma rămasă, iar la ieşirea din magazin mai cumpără de 1 leu o felicitare. Procedează în mod similar încă în două magazine şi se întoarce acasă cu 2 lei. Cu ce sumă de bani a plecat de acasă?

3.6. Probleme mixte

Esenţa matematicii este libertatea ei
G. Cantor

În această categorie am inclus probleme care se rezolvă prin combinarea mai multor metode sau care ies din schema tipică de rezolvare precum și câteva probleme care solicită „isteţimea" rezolvitorului.

✐ **Probleme propuse:**

1. Edu scrie numerele pare pe două rânduri, unul sub altul, astfel: pe primul rând scrie 0, pe al doilea scrie 2 şi 4, pe al treilea scrie 6, 8 şi 10 şi aşa mai departe.
   a) Ce numere scrie pe al şaselea rând?
   b) Pe al câtelea rând apare scris numărul 100?
   (Concursul *Evaluarea în educaţie*, 2012, cl. a III-a)

2. Se dă şirul de numere 1, 5, 9, 13, 17, …, 125, 129.
   a) Care este suma dintre primul şi ultimul număr din şir?
   b) Câte numere sunt în şir?
   c) Este 94 termen al șirului?
   d) Care este cel mai mare număr mai mic decât 1000 care este termen al șirului
   e) Explicaţi de ce, oricum am alege la întâmplare 18 numere din şir, printre cele alese vor exista două numere care au suma 130.
   (Concursul *Evaluarea în educaţie*, 2012, cl. a III-a)

3. Într-o clasă de 21 de elevi dublul numărului de fete este egal cu numărul băieţilor plus 3. Să se arate că cel puţin 2 băieţi sunt născuţi în aceeași lună a anului și cel puţin 2 fete sunt născute în aceeași zi a săptămânii.

4. Să se determine numerele naturale a şi b pentru care avem relaţia: $(a-1) \times (b+2)=6$.

5. Produsul a două numere este 9191. Dacă mărim primul număr cu 9, obţinem produsul 10100. Aflaţi cele două numere.

6. Aflaţi numărul x care verifică egalitatea:

   a) $(285 - 81) : 102 + x \times 900 - 1400 = 402$

   b) $300 + [340 + 508 - (300 \times x + 70)] - 5 = 365$

7. Două numere au suma 28. Arătaţi că produsul lor este mai mic decât 196.

8. Bill are la fel de mulţi fraţi ca şi surori. Sora lui, Adina are de două ori mai mulţi fraţi decât surori. Câţi copii sunt în familie?
   a) 1 ; b) 2; c) 4; d) 5; e) 7.

   (Concursul *Cangurul*, 2008)

9. Jocul „Ghiceşte suma” se joacă cu şapte cartonaşe numerotate de la 1 la 7, care se amestecă şi se aşază cu faţa în jos. Ana şi Dan trag pe rând câte o carte. După ce a luat a treia carte, Ana îi spune lui Dan: „Acum ştiu că suma numerelor de pe cele două cărţi ale tale este pară!” Suma numerelor de pe cărţile Anei este:
   a) 3 ; b) 12; c) 6; d) 8; e) 16.

   (Concursul *Cangurul*, 2008)

10. Monştrii şi monstruleţii iau parte la Olimpiada 2006, în total 10 participanţi. Fiecare monstru are 6 mâini şi fiecare monstruleţ are 4 mâini. Câte mâini ar putea avea împreună toţi participanţii?
    a) 27 ; b) 20; c) 35; d) 34; e) 44.

    (Concursul *Cangurul*, 2006)

11. Gândeşte-te la un număr. Dublează numărul apoi adaugă 20. Rezultatul obţinut se împarte la 2. Scade 10. Ai obţinut numărul la care te-ai gândit. De ce?

12. Un ţăran recoltează de pe un teren 1278 kg de cartofi şi de pe al doilea teren cu 356 kg mai puţini cartofi. O parte din cartofi îi vinde cu 1,5 lei pe kg obţinând 600 lei. O treime din cartofii rămaşi îi împarte la cei trei fii ai săi. Câte kg de cartofi primeşte fiecare fiu?

13. Iepurașul e la 3 m în faţa unui câine. Când iepurașul o ia la fugă câinele îl urmează. Câte sărituri face câinele până îl ajunge pe iepuraș, dacă săritura câinelui este de 2 m lungime, iar cea a iepurașului este de 1 m lungime?
    a) 1 ; b) 2; c) 3; d) 4; e) Câinele nu-l ajunge pe iepuraș.
    (Concursul *Cangurul*, 2009)

14. În tabăra Cangurul, Alex rezolvă 5 probleme pe zi, Sergiu 2 probleme pe zi, iar Carmen cât Alex şi Sergiu la un loc. În câte zile Carmen rezolvă acelaşi număr de probleme pe care-l rezolvă Alex în 14 zile?

15. La un concurs de matematică s-au propus spre rezolvare 20 de probleme cu alegere multiplă. Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 10 pt., pentru fiecare problemă rezolvată greşit se scad 5 pt., iar pentru problemele nerezolvate se acordă 0 pt. Mihai a obţinut 125 de pt. Câte probleme a rezolvat corect, greşit şi câte nu a rezolvat deloc Mihai? (există mai multe soluţii)

16. Mama cumpără pentru zacuscă 3 kg de ardei a 4 lei/kg, 4 kg de roşii a 3,5 lei/kg, 5 kg de vinete a 2,5 lei/kg, 1,5 kg de ceapă a 2 lei/kg şi 500 g de sare a 1 leu/kg. Cât o costă un kg de zacuscă?

17. Pentru o acţiune de strângere de fonduri copiii unei clase au pregătit suc din concentrat de suc şi apă minerală. La 200 ml de suc concentrat au adăugat 800 ml de apă minerală. Ei au vândut un pahar de suc de 200 ml cu 2 lei, iar unul de 300 ml cu 2,5 lei. În total ei au vândut 60 de pahare de suc de 200 ml şi 50 de pahare de 300 ml. Ştiind că un litru de suc concentrat a costat 8 lei, iar un litru de apă 2 lei aflaţi câţi litri de suc au vândut şi ce profit au avut pentru fiecare tip de pahar şi ce profit total au obţinut.

18. Pe o alee într-un parc sunt tei și castani. Între doi tei consecutivi sunt 6 castani. Numărul castanilor este cu 69 mai mare decât numărul teilor. Află câţi tei și câţi castani sunt dacă la ambele capete sunt plantaţi tei.

19. Alina, mama şi bunica au împreună 99 ani. Alina este mai mică decât bunica de 5 ori, mama este de 3 ori mai mare decât Alina. Să se afle:
    a) vârsta fiecărei persoane.
    b) Peste câţi ani vârsta Alinei va reprezenta 4/15 din vârsta bunicii?
    c) Ce parte din vârsta mamei va reprezenta atunci vârsta Alinei?
20. Într-o livadă sunt 5000 de pomi fructiferi aşezaţi în rânduri a câte 20 de pomi. Pe primele 148 rânduri s-au plantat meri, pe următoarele 59 de rânduri sunt peri, iar pe restul gutui. Aflaţi câţi gutui au fost plantaţi şi pe câte rânduri.
21. La un centru social s-au adus 900 kg de zahăr, 690 l ulei şi 470 kg de paste. Ele au fost ambalate pentru a fi date persoanelor nevoiaşe în pachete fiecare conţinând: 4 kg de zahăr, 3 l de ulei şi 2 kg de paste. Care este numărul maxim de pachete care se pot face şi ce cantitate din fiecare produs a rămas neambalat?
22. Pentru o tombolă se vând bilete la preţul de 5 lei biletul urmând ca prin tragere la sorţi să se acorde următoarele premii: un premiu I constând dintr-un ghiozdan în valoare de 129 lei, trei premii II constând dintr-un penar în valoare de 49 lei fiecare şi cinci premii III constând dintr-un stilou în valoare de 25 lei fiecare. Ce câştig se obţine din vânzarea a 100 de bilete? Câte bilete trebuie vândute pentru un câştig de 199 de lei?
23. La o florărie s-au adus trandafiri roșii și galbeni, câte 100 de bucăţi de fiecare fel, din care se fac buchete pentru vânzare. Din aceștia s-au vândut 17 de buchete a 3 trandafiri roșii, 14 buchete a 5 trandafiri galbeni și 18 buchete formate din 2 trandafiri roșii și unul galben. Știind că preţul unui trandafir roşu este de 3 lei, iar al unuia galben de 2,50 lei, aflaţi ce sumă de bani s-a încasat și câţi trandafiri de fiecare fel au rămas nevânduţi.
24. La o staţie de sortare a fructelor se aduc trei lăzi a câte 37 kg în care sunt amestecate mere roșii, mere galbene și gutui. După ce se iau toate gutuile, în lăzi mai ramân 17 kg, 15 kg și respectiv 14 kg de

mere. Câte kg de gutui sunt? Știind că merele galbene sunt cu 8 kg mai multe decât cele roșii, aflaţi câte kg de mere de fiecare fel sunt?

25. Ana are 600 de bile albe și roșii. Dorind să aibă doar bile albe, ea face schimb cu Roxana care oferă 8 bile albe la fiecare 17 bile roșii. După schimb Ana are 420 de bile albe. Ce bile albe a avut Ana la început?

26. Marcel are o bicicletă. Dacă Costin îi dă lui Marcel 2 ciocolate, atunci acesta îi împrumută bicicleta lui Costin timp de 3 ore. Dacă Costin în dă 28 de caramele, atunci Marcel îi împrumută bicicleta timp de 2 ore. Află pentru cât timp ca primi Costin bicicleta în cazul înc are îi oferă ui Marcel o ciocolată și 7 caramele.

27. Se dau 33 de obiecte având masele de 1 g, 2 g, 3 g, ..., 33 g. Să se formeze trei grupe cu același număr de obiecte care să aibă aceeași masă.

28. Într-o lună trei duminici cad în zile pare. În ce zi a săptămânii cade data de 7?

29. Suma vârstelor a trei copii este de 5 ani. Cel mare are ochii verzi. Care sunt vârstele copiilor?

30. În câte zile ajunge un melc în vârful unui stâlp de 12 m, știind că ziua el urcă 5 m, iar noaptea alunecă 4 m?

31. Clopotele din turnul bisericii bat de 5 ori în 5 secunde. În câte secunde vor bate de 9 ori?

32. Un pescar amator se înapoia odată de la pescuit. Văzându-l cam posomorât feţiţă sa i-a ieșit nerăbdătoare în cale și la- întrebat:
    - De ce ești supărat, tată?
    - Cum să nu fiu, îi răspunse el, când știu câţi pești am prins de astă dată: 6 fãra cap, 9 fără coadă și 8 pe jumătate!

    Câţi pești a prins acest șugubăţ pescar?

32. Problema celor 5 pâini (după *Ion Creangă*): „Cică o dată 2 oameni se însoţiră ca să meargă din satul lor până la oraș, unde fiecare avea o treabă. Au pornit ei din zori și către amiază li se făcu foame.

Căutară ei un loc umbros și se așezară să mănânce. Unul avea în desagă 2 pâini, celalalt 3 pâini. Dar n-apucaseră să se așeze în iarbă, că în faţa lor răsări, ca din pământ, un bărbat, care le zise:

- Oameni buni, iaca, pornii la drum, crezând că ajung mai repede și nu mi-am luat de-ale gurii, iar acum mi-e foame. Nu vreţi să împărţiţi hrana voastră cu mine? Să știţi că bani am și nu vă voi ramane dator.

- Bine, ziseră cei 2 săteni.

Scoaseră cele 5 pâini și împărţiră totul în mod egal. La plecare, străinul le dădu 5 lei și-și luă ziua bună de la ei. Acum ce sa facă? Cum să împartă banii? Cel cu 3 pâini socotea că i se cuvin 3 lei, celălalt zicea că dacă au împărţit în mod egal pâinea, trebuie să împartă la fel și banii, deci să ia 2,5 lei. De aici - sfadă. Și au hotărât ca, la oraș, să se adreseze judecătorului. Acesta, intr-adevar, i-a împăcat, arătându-le cum trebuie împărţiţi banii. Cum a procedat judecătorul?"

33. Foaie verde de arţari-
Câte ciori sunt și câţi pari?
Dacă ele stând răzleţe
Ca s-avem un par și-o cioară,
Una din „cinstite feţe"
S-ar roti pe dinafară...
Însă dacă ele ar vrea
Câte două-n par să stea,
Alt neajuns apare iar:
Rămâne liber un par!

(*Gazeta Matematică*, 1912)

34. Completaţi șirurile de calcule și efectuaţi:

a)
$1 \times 1 =$
$11 \times 11 =$
$111 \times 111 =$
…………………
$111111111 \times 111111111 =$

b)
$1 \times 8 + 1 =$
$12 \times 8 + 2 =$
$123 \times 8 + 3 =$
…………………
$123456789 \times 8 + 9 =$

c)
$1 \times 9 + 2 =$
$12 \times 9 + 3 =$
$123 \times 9 + 4 =$
…………………
$123456789 \times 9 + 10 =$

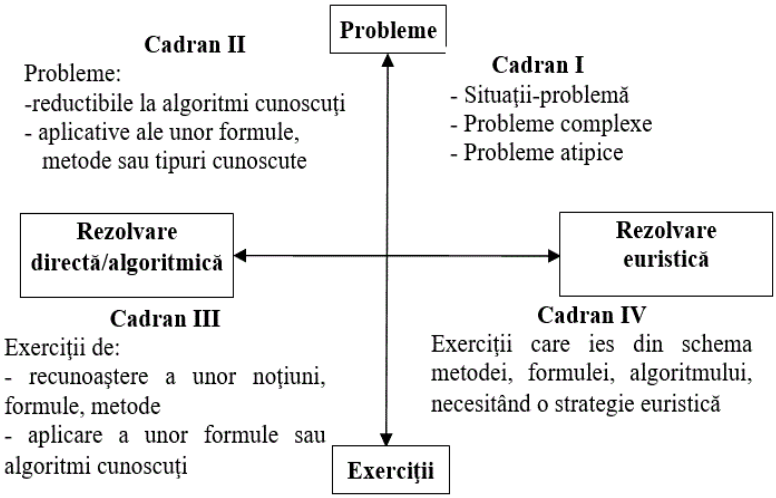
d)
$1 + 2 + \ldots + 10 =$
$1 + 2 + \ldots + 100 =$
$1 + 2 + \ldots + 1000 =$
$1 + 2 + \ldots + 10000 =$
$1 + 2 + \ldots + 100000 =$

4. Metodologia rezolvării exercițiilor și problemelor de matematică

4.1. Clasificări ale problemelor de aritmetică

🕮 Aspecte teoretice:

În figura de mai jos (Magdaș, 2014, p.89, prelucrare după Cârjan, 2002, p.17), sunt prezentate corelaţiile care se pot face între exerciţii-probleme reprezentate ca extreme ale axei verticale şi metodele de rezolvare a acestora de tip algoritmic-euristic, reprezentate ca extreme ale axei orizontale. Rezolvarea algoritmică este completată de rezolvarea directă care constă într-o aplicare directă a unor metode, raţionamente etc.



Se obţin astfel patru cadrane. În fiecare cadran în parte am identificat şi prezentat tipurile de probleme care se încadrează în categoria respectivă. Este evident faptul că profesorul trebuie să abordeze în activităţile didactice exerciţii şi probleme din fiecare cadran în parte. O observaţie care se poate face este aceea că exerciţiile din cadranul III trebuie să fie cantitativ predominante, urmate de cele din

cadranele II şi IV. Exerciţiile din cadranul I, excluzând situaţiile-problemă, sunt predominant abordate în cadrul pregătirilor pentru concursurile şcolare şi doar ocazional în activitatea curentă de la clasă.

✐ **Probleme propuse:**

Rezolvaţi şi încadraţi fiecare problemă în cadranul corespunzător:

1. Efectuaţi transformările:

   10 m = … cm = … dam

   7 kg = … hg = … dag = … g

2. Calculaţi: 500 cm + 120 dam = …

3. La o croitorie sunt 100 m de stofă. Pentru o uniformă este nevoie de 1m şi 50 cm de stofă. Aflaţi câte uniforme se pot face şi câţi m de stofă rămân.

4. O bucată de scândură care are lungimea de 4 m este tăiată în două bucăţi, astfel încât una să fie cu 28 cm mai mare decât cealaltă. Câţi cm are fiecare bucată?

5. O bucată de panglică lungă de 12 m se taie în bucăţi de 3 m fiecare. Câte tăieturi se vor face şi câte bucăţi se obţin?

6. O bucată de panglică lungă de 72 m se taie în bucăţi de 3 m fiecare. Câte tăieturi se vor face şi câte bucăţi se obţin?

7. Ionel construieşte un gard de 35 m lungime (în linie dreaptă) şi bate câte un ţăruş din metru în metru. Câţi ţăruşi bate?
   (Concursul *Cangurul*, 2003)

8. Pe partea dreaptă a unei alei sunt 9 felinare. Distanţa dintre 2 felinare alăturate este de 8 metri. John a alergat pe alee, de la primul felinar la ultimul. Câţi metri a alergat John?
   (Concursul *Cangurul*, 2007)

9. Un teren în formă de dreptunghi cu lungimea de 20 m şi lăţimea de 12 m se încercuieşte cu un gard. Pentru aceasta se bat ţăruşi la din 2m în 2 m. Câţi ţăruşi se bat?
10. Un teren în formă de triunghi cu laturile de 12 m, 16 m şi 20 m se încercuieşte cu un gard. Pentru aceasta se bat ţăruşi la din 2 m în 2 m. Câţi ţăruşi se bat? (Generalizare pentru un poligon convex)
11. O prăjitură dreptunghiulară cu lungimea de 40 cm şi lăţimea de 24 cm se taie cu cuţitul în bucăţi de 4 cm × 3 cm. Câte bucăţi de prăjitură se obţin şi care este numărul minim de tăieturi?
12. Un cub plin cu latura de 30 cm se taie în cuburi mai mici fiecare cu latura de 10 cm. Câte cuburi mici se vor obţine şi de câte tăieturi este nevoie? Presupunem că exteriorul cubului este vopsit cu roşu. Câte din cuburile mici obţinute prin tăiere au: nici o faţă roşie, o faţă roşie, 2 feţe roşii, 3 feţe roşii ?
13. Când au marcat trecerea de pietoni de pe strada mea, muncitorii au trasat succesiv dungi albe şi negre cu lăţimea de 30 cm fiecare. În total, zebra are 8 dungi albe dintre care două sunt aşezate chiar lângă trotuare. Ce lăţime are strada mea?

(Concursul *Cangurul*, 2011)

4.2. Metode generale de rezolvare a problemelor

🕮 **Aspecte teoretice** (după Magdaș, 2014; Vălcan, 2005):

Metoda sintetică (rezolvare inductivă): constă în a face o sinteză din mai multe componente pentru a găsi soluţia. Cu alte cuvinte se porneşte de la cunoscut spre necunoscut, de la particular spre general, sau de la concret spre abstract. Întrebarea care stă la baza rezolvării este: „Dacă ştiu … ce pot să aflu?”. Propoziţiile matematice se leagă între ele prin implicaţii astfel: $ipoteza \Rightarrow p_1 \Rightarrow ... \Rightarrow p_n \Rightarrow concluzia$.

Metoda analitică (rezolvare deductivă): cuvântul analiză sugerează a analiza concluzia în scopul identificării unor alte propoziţii matematice mai simple echivalente cu aceasta. Cu alte cuvinte se porneşte de la necunoscut spre cunoscut, de la general spre particular, sau de la abstract spre concret. Întrebarea care stă la baza rezolvării este: „Ce trebuie să ştiu pentru a arăta că …?”. Propoziţiile matematice se leagă între ele prin echivalenţe astfel: $concluzia \Leftrightarrow q_1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow q_n \Leftrightarrow ipoteza$ care este o propoziţie adevărată.

Metoda analitico-sintetică: este o combinaţie a celor două metode prezentate anterior. Se porneşte atât de la ipoteză spre concluzie cât şi dinspre concluzie spre ipoteză până când se ajunge la o propoziţie adevărată. Mai exact: $ipoteza \Rightarrow p_1 \Rightarrow ... \Rightarrow r$ şi $concluzia \Leftrightarrow q_1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow r$ şi *r* este o propoziţie adevărată.

✐ **Probleme propuse:**

Rezolvaţi următoarele probleme şi specificaţi tipul de raţionament: sintetic, analitic sau analitico-sintetic.

1. Gândeşte-te la un număr. Dublează numărul apoi adaugă 20. Rezultatul obţinut se împarte la 2. Scade 10. Ai obţinut numărul la care te-ai gândit. De ce?

2. a) Doi fraţi au moştenit două terenuri. Primul frate are un teren în formă de pătrat cu latura de 15 m. Celălalt frate are un teren dreptunghiular cu lungimea mai mare cu 1 m decât latura pătratului şi cu lăţimea mai mică cu 1 m decât latura pătratului. Aflaţi care dintre cei doi fraţi are nevoie de mai mulţi m de gard pentru a îngrădi terenul?
   b) Puteţi da răspunsul la problema de la subpunctul a) fără sa știţi lungimea laturii pătratului?
   c) Arătaţi în două moduri că:
   $$\mathbf{2 \times [(n+1)+(n-1)] = 4 \times n,\ pentru\ orice\ n \in N.}$$

3. Un ţăran recoltează de pe un teren 1278 kg de cartofi şi de pe al doilea teren cu 356 kg mai puţini cartofi. O parte din cartofi îi vinde cu 1,5 lei pe kg obţinând 600 lei. O treime din cartofii rămaşi îi împarte la cei trei fii ai săi. Câte kg de cartofi primeşte fiecare fiu?
4. Un număr este cu 12 mai mare decât alt număr. Triplul numărului mai mic adunat cu dublul numărului mai mare este 164. Să se afle numerele.
5. În tabăra Cangurul, Alex rezolvă 5 probleme pe zi, Sergiu 2 probleme pe zi, iar Carmen cât Alex şi Sergiu la un loc. În câte zile Carmen rezolvă acelaşi număr de probleme pe care-l rezolvă Alex în 14 zile?
6. La un concurs de matematică s-au propus spre rezolvare 20 de probleme cu alegere multiplă. Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 10 pt., pentru fiecare problemă rezolvată greşit se scad 5 pt., iar pentru problemele nerezolvate se acordă 0 pt. Mihai a obţinut 125 de pt. Câte probleme a rezolvat corect, greşit şi câte nu a rezolvat deloc Mihai? (există mai multe soluţii)

4.3. Etapele metodice de rezolvare a exerciţiilor şi problemelor de aritmetică

🕮 **Aspecte teoretice** (după Magdaș, 2014):

G. Polya (1965) a fost unul dintre primii matematicieni care a considerat că matematica trebuie predată şi învăţată urmând „căile şi mijloacele care duc la invenţii şi decoperiri”. Astfel, privind rezolvările de probleme ca un proces de invenţie, Polya a identifcat etapele care trebuie parcurse pentru rezolvarea acestora. Pe baza etapelor propuse de acesta, propunem următoarele *etape metodice* pentru rezolvarea problemelor de aritmetică (a se vedea și Roșu, 2006):

1. *Înţelegerea / însuşirea enunţului problemei.*

Această etapă constă în:

- expunerea problemei prin mijloace concrete sau citirea textului de profesor şi/sau unul sau mai mulţi elevi;
- explicarea cuvintelor şi a expresiilor necunoscute.

2. *Analiza problemei (judecata sau examinarea problemei).*

Această etapă constă în:

- repetarea problemei de către elevi, fără ca aceştia să citească textul ci eventual să se ghideze după acesta. Această etapă are rolul unui feed-back pe care îl primeşte profesorul cu privire la însuşirea textului problemei de către elevi;
- scrierea datelor problemei (ce se dă şi ce se cere). Această etapă este foarte importantă şi necesară pentru esenţializarea problemei;
- discuţii privitoare la conţinutul problemei: se găsesc legături între datele problemei şi necunoscute, se fac legături cu probleme rezolvate anterior;
- realizarea modelului problemei (schematizarea problemei).

Finalitatea etapei de analiză a problemei o constituie schematizarea problemei, deci concretizarea enunţului într-un *model al problemei* pe baza căruia să se poată face rezolvarea acesteia. Scrierea datelor problemei poate fi făcută simultan cu repetarea problemei de către elevi sau cu etapa de discuţii. Datele problemei se pot scrie într-o formă iniţială şi apoi se trec pe modelul realizat, dar se pot trece direct pe acesta. Această variantă este o alternativă la copierea datelor problemei şi are un rol important în analiza acesteia. Alegerea modelului adecvat reprezintă de cele mai multe ori cheia în identificarea modului de rezolvare şi în rezolvarea propriu-zisă a problemei. Aşadar considerăm că aceasta este etapa cea mai importantă pentru rezolvarea problemei.

3. *Întocmirea unui plan de rezolvare a problemei.*

Pe baza modelului realizat în etapa 2, în această etapă se continuă discuţia dintre profesor şi elevi cu:

- descompunerea problemei în probleme simple;
- punerea orală a întrebărilor care conduc la rezolvarea fiecărei probleme simple şi discutarea modului de rezolvare al fiecărei probleme simple în parte,
- discutarea modului de obţinere a rezultatului.

În această etapă *modelul* realizat anterior *poate fi completat sau să sufere modificări*. Uneori etapele 2 şi 3 se întrepătrund firesc în sensul că în etapa de schematizare se identifică firesc problemele simple componente şi se discută chiar şi modul de rezolvare a acestora. În aceste cazuri profesorul nu trebuie să forţeze discuţia pentru delimitarea strictă a celor două etape.

4. *Rezolvarea problemei.*

În această etapă:

- se scriu întrebările,
- se fac calculele şi
- se obţine rezultatul.

5. *Extinderi (Activitatea suplimentară după rezolvare).*

Deşi aparent etapa de rezolvare a problemei pare să fie un punct final, în realitate, în rezolvarea nici unei probleme nu trebuie să omitem această ultimă etapă care are numeroase valenţe formative şi duce la dezvoltarea modului matematic de gândire. În această etapă:

- se revede planul de rezolvare;
- se verifică soluţia (dacă este posibil);
- se caută alte căi de rezolvare;
- se formulează concluzii;
- se scrie rezolvarea problemei printr-un exerciţiu;
- se complică problema (prin schimbarea datelor sau a cerinţelor etc.);

- se generalizează problema;
- se compun probleme de acelaşi tip;
- se rezolvă probleme asemănătoare etc.

Profesorul va selecta din activităţile propuse acele extinderi care se potrivesc cel mai bine problemei abordate şi mai ales care decurg firesc din textul problemei.

☑ **Exemplu.** Realizaţi analiza metodică a rezolvării următoarei probleme de aritmetică:

Dan, Virgil şi Ionuţ colecţionează timbre. Dan are 7 timbre iar Virgil de două ori mai multe timbre. Ionuţ a adus cu 5 timbre mai puţin decât Virgil . Câte timbre au în total cei trei copii?

Problema propusă este o problemă cu rezolvare directă inductivă. Întrebările se înlănţuie liniar şi în ordinea în care informaţiile apar în textul problemei. Schematizarea aleasă este clasică. Acest tip de probleme se propun elevilor în clasele I şi a II-a sau în cazul în care introducem noi operaţii aritmetice.

Etapele metodice de rezolvare a problemei:

1. Însuşirea enunţului problemei: profesorul şi apoi unul-doi elevi citesc textul problemei;

2. Analiza problemei: are loc o conversaţie, pe care am încercat să o previzionăm mai jos, simultan cu încercuirea pe text a datelor esenţiale (deci în paralel se face schematizarea problemei):

Întrebările profesorului	*Răspunsurile/ Activitatea elevilor*
Ce se dă în problemă?	În problemă se dă faptul că *Dan, Virgil şi Ionuţ colecţionează timbre. Dan are 7 timbre iar Virgil de două ori mai multe timbre. Ionuţ a adus cu 5 timbre mai puţin decât Virgil.*
Ce trebuie să aflăm?	*Câte timbre au în total cei trei copii.*

Să completăm ce ştim şi ce trebuie să aflăm.	Elevii selectează din text ceea ce corespunde ipotezei şi concluziei şi completează cele două rubrici: „Se dă” şi „Se cere” (vezi Modelul 2) sau marchează pe text (vezi Modelul 1).
Pentru a afla numărul total de timbre ce trebuie să ştim?	Câte timbre are fiecare copil.
Ştim câte timbre are Dan?	Da, Dan are 7 timbre.
Ştim câte timbre are Virgil?	Nu.
Dar putem afla?	Da.
Ce informaţie din datele problemei ne ajută să aflăm câte timbre are Virgil?	Informaţia că *Virgil are de două ori mai multe timbre decât Dan*.
Ştim câte timbre are Ionuţ?	Nu.
Dar putem afla?	Da.
Ce informaţie din datele problemei ne ajută să aflăm câte timbre are Ionuţ?	Informaţia că *Ionuţ a adus cu 5 timbre mai puţin decât Virgil*.
Ce trebuie să mai aflăm?	Câte timbre au în total cei trei copii?
Când putem afla acest lucru?	După ce ştim câte timbre a adus fiecare copil.

Cele două schematizări posibile sunt date mai jos:

Modelul 1 constă în realizarea schematizării direct pe textul problemei şi constă în notarea prin încercuire sau subliniere (eventual folosirea a două culori diferite) a ipotezei respectiv a concluziei probleme. Dacă textul este dat pe o fişă de lucru se câştigă timp în etapa de analiză şi de alcătuire a planului de rezolvare.

Se dă: *Dan, Virgil şi Ionuţ colecţionează timbre. Dan are 7 timbre iar Virgil de două ori mai multe timbre. Ionuţ a adus cu 5 timbre mai puţin decât Virgil .*

Se cere: *Câte timbre au în total cei trei copii?*

Modelul 2 al problemei constă în scrierea schematică a enunţului problemei astfel:

Se dă: *Dan ... 7 timbre*

Virgil ... de 2 ori mai multe timbre decât Dan

Ionuţ ... cu 5 timbre mai puţin decât Virgil

Se cere: *Câte timbre au în total cei trei copii?*

3. Alcătuirea planului de rezolvare: în această etapă se continuă firesc conversaţia anterioară prin identificarea problemelor simple, formularea orală a întrebărilor şi modul de soluţionare a fiecărei probleme simple. Modelele se completează prin marcarea întrebărilor simple şi a operaţiilor corespunzătoare acestora.

Întrebările profesorului	*Răspunsurile/ Activitatea elevilor*
Puteţi să-mi spuneţi acum care este prima întrebare pe care o punem pentru rezolvarea problemei?	Da. *Câte timbre are Virgil?*
Să încercuim în datele problemei informaţia care ne ajută să răspundem la prima întrebare.	Elevii încercuiesc în datele problemei informaţia corespunzătoare primei întrebări.
Prin ce operaţie rezolvăm această întrebare?	Prin operaţia de înmulţire.
Să notăm acest lucru în schema noastră.	Elevii notează operaţia matematică ce trebuie efectuată.

Care este următoarea între-bare?	*Câte timbre are Ionuţ?*
Să încercuim în datele problemei informaţia care ne ajută să răspundem la prima întrebare.	Elevii încercuiesc în datele problemei informaţia corespunzătoare celei de a doua întrebări.
Prin ce operaţie rezolvăm această întrebare?	Prin operaţia de scădere.
Să notăm acest lucru în schema noastră.	Elevii notează operaţia matematică ce trebuie efectuată.
Ce mai trebuie să facem?	Să aflăm ceea ce se cere: *Câte timbre au în total cei trei copii?*
Să încercuim cerinţa problemei ca fiind a treia întrebare.	Elevii încercuiesc ceea ce se cere ca fiind a treia întrebare.
Prin ce operaţie rezolvăm această întrebare?	Prin operaţia de adunare.
Să notăm acest lucru în schema noastră.	Elevii notează operaţia matematică ce trebuie efectuată.

Modelul 1:

Se dă:
Dan, Virgil şi Ionuţ colecţionează timbre.

1 ×

Dan are 7 timbre iar Virgil de două ori mai multe timbre.

2 -

Ionuţ a adus cu 5 timbre mai puţin decât Virgil .

3 +

Se cere: *Câte timbre au în total cei trei copii?*

4. Rezolvarea propriu-zisă: se scriu întrebările, se fac calculele şi se obţine rezultatul astfel:

I1. Câte timbre are Virgil?

$7 \times 2 = 14$ timbre

I2. Câte timbre are Ionuţ?

$14 - 5 = 9$ timbre

I3. Câte timbre au cei trei copii la un loc?

$7 + 14 + 9 = 30$ timbre

Răspuns: 30 timbre

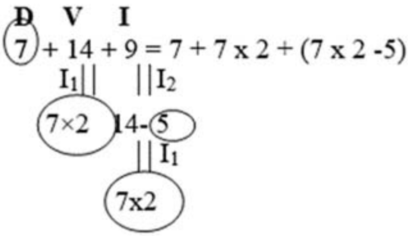
5. Extinderi: În această etapă elevii vor rezolva problema printr-un exerciţiu. În scrierea exerciţiului se folosesc doar valorile care apar în textul problemei, operaţii matematice şi paranteze.

Varianta I. Pentru a scrie exerciţiul se porneşte de la ultimul calcul efectuat, corespunzător ultimei întrebări: $7 + 14 + 9$. În acest calcul se identifică valorile cunoscute, respectiv: primul 7 reprezintă numărul de timbre ale lui Dan, ca urmare această valoare se păstrează. Numărul 14 corespunde numărului de timbre ale lui Virgil, număr care s-a aflat prin întrebarea 1 şi ca urmare el va fi înlocuit cu: 7×2. Numărul 9 corespunde timbrelor lui Ionuţ şi s-a aflat prin întrebarea 2. Aşadar numărul de timbre ale lui Ionuţ se află calculând $14 - 5$. Dar valoarea 14 nu apare în textul problemei, ea a fost obţinută la întrebarea 1 deci o vom înlocui prin 7×2. Obţinem aşadar $14 - 5 = (7 \times 2) - 5 = 7 \times 2 - 5$. Deci numărul 9 din exerciţiu se va înlocui prin acest calcul. Astfel obţinem exerciţiul de rezolvare al problemei ca fiind:

$$7 + 7 \times 2 + (7 \times 2 - 5) = 7 + 14 + 9 = 30$$

Varianta II. Pentru scrierea exerciţiului se poate face apel şi la un model grafic pentru rezolvarea problemei. Se porneşte tot de la ultimul calcul efectuat. Deasupra fiecărei valori se trece ceea ce ea reprezintă, în cazul

nostru numerele reprezintă numărul de timbre ale fiecărui copil, aşadar am trecut iniţialele copiilor.



În acest calcul am încercuit valoarea 7 care este o valoare cunoscută care apare în textul problemei. Valoarea 14 se obţine la întrebarea 1 aşadar ea va fi înlocuită cu 7×2 pe care l-am încercuit pentru că cele două valori 7 şi 2 sunt valori cunoscute din textul problemei. Valoarea 9 se obţine la întrebarea 2 ca fiind $14-5$. Am încercuit valoarea 5 pe care o păstrăm pentru că este cunoscută din textul problemei, iar valoarea 14 am înlocuit-o din întrebarea 1 prin 7×2 care sunt şi ele valori cunoscute. Putem acum să rescriem calculul utilizând doar valorile încercuite pe care le aşezăm după egal în locurile corespunzătoare. Vom pune paranteze pentru calculele de pe fiecare coloană de jos în sus începând cu paranteza rotundă, apoi dreaptă și la final acolada. Se obţine aşadar exerciţiul prin care se rezolvă problema:

$$7 + (7 \times 2) + [\,(7 \times 2) - 5] = 7 + 7 \times 2 + (\,7 \times\; 2 - 5)$$

✐ **Probleme propuse:**

Realizaţi analiza metodică a rezolvării următoarelor probleme de aritmetică:

1. În patru saci sunt 118 kg de mere. După ce s-au scos din fiecare sac aceeași cantitate de mere în saci au rămas 20 kg, 18 kg, 28 kg și respectiv 32 kg. Câte kg de mere erau inițial în fiecare sac?
2. Ana, Bianca și Carmen își strâng banii în aceeași pușculiţă. Ana are 170 lei iar Bianca cu 28 lei mai puţin decât Ana. Carmen are cu 5

lei mai puţin decât jumătate din suma totală de bani a Anei şi Biancăi. Câţi lei au în total cele trei fete?

3. Irina și Andrei au primit trei cutii cu bomboane pe care doresc să le împartă în mod egal. În prima cutie sunt 24 bomboane, în cea de a doua cu 6 mai multe decât în prima, iar în cea de a treia tot atâtea bomboane cât diferenţa dintre cele două cutii. Câte bomboane va lua fiecare copil?

4. Într-un coş sunt 53 de mere. Ana primeşte de două ori mai puţine decât Mihai, iar Dan cât Ana şi Mihai la un loc. Câte mere a primit fiecare copil dacă la final au mai rămas 5 mere?

5. O gospodină a cumpărat 8 kg de zahăr a 3 lei kilogramul şi 2 litri de ulei a 4 lei litrul. Ce rest a primit de la 50 lei?

6. Karina și sora ei Nicole au împreună 17 de ani. Karina este cu 9 ani mai mare decât sora ei. Peste câţi ani Karina va fi de două ori mai mare decât Nicole?

7. Întro clasă sunt 29 de elevi, băieţi cu 3 mai mulţi decât fete. Azi lipsesc de la școală 3 fete și de 2 ori mai mulţi băieţi decât fete. Câţi elevi sunt azi la școală?

8. La un magazin de jucării s-au adus 96 de păpuși, de 6 ori mai puţine mașinuţe, jucării de pluș de 5 ori mai multe decât mașinuţe, iar cutii de Lego de 4 ori mai puţine decât jucării de pluș. Câte jucării s-au adus în total?

9. Maria are 5 ani, adică cu 3 ani mai puţin decât sora ei, Ana. Peste un an mama va avea de patru ori vârsta Anei. Câţi ani are mama?

10. Întro livadă sunt 284 de pomi fructiferi. Jumătate din numărul total sunt peri, un sfert sunt pruni, iar restul caişi. Cu câţi caiși sunt mai puţini decât peri?

11. Raluca a plantat în grădină câte 11 lalele pe fiecare dintre cele 3 rânduri, garoafe de două ori mai multe şi 5 rânduri a câte 16 trandafiri. Câte flori a plantat Raluca?

12. Mătuşa mea îşi sărbătoreşte vârsta de 40 de ani. Cei trei copii ai săi au 5 ani, 6 ani şi respectiv 7 ani. Peste câţi ani vârsta mătuşii va fi egală cu suma vârstelor celor 3 veri ai mei?
    a) 7;   b) 11;   c) 14;   d) 18 ;   e) 21.
    (Concursul *Cangurul*, 2011)
13. În tabăra Cangurul, Alex rezolvă 5 probleme pe zi, Sergiu 2 probleme pe zi, iar Carmen cât Alex şi Sergiu la un loc. În câte zile Carmen rezolvă acelaşi număr de probleme pe care-l rezolvă Alex în 14 zile?
14. Mama a cumpărat în două zile fructe pentru cei 3 copii ai săi. Pentru fiecare copil a cumpărat în fiecare zi câte 2 banane şi 3 portocale. Câte fructe a cumpărat mama în total?
15. Câţi elevi sunt într-o şcoală ştiind că jumătate din numărul băieţilor este 98, iar numărul fetelor este cu 5 mai mare decât triplul sfertului numărului de băieţi?
16. Când Mihaela avea 7 ani, mama avea 39 de ani. Acum mama are de 3 ori vârsta Mihaelei. Ce vârstă au în prezent Mihaela și mama?
17. Ionel are 25 de lei si Ana 13 lei. Ionel cheltuiește 3 lei pe zi cumpărându-și câte o plăcintă, iar Ana 1 lei pe zi cumpărându-și câte un covrig. După câte zile cei doi copii vor avea aceeași sumă de bani?
18. Două loturi de pământ au o suprafaţă totală de 46 ha. După ce pe primul lot se seamănă 20 de ha, iar pe al doilea 16 ha, suprafeţele rămase nesemănate pe cele două loturi sunt egale. Aflaţi câte ha are fiecare lot.
19. Suma a trei numere este 569. Dacă din fiecare număr se scade o aceeași valoare se obţin numerele 178, 197 și respectiv 173. Care sunt cele trei numere?
20. Cartea lui Tudor are 146 de pagini, iar a Dianei cu 15 pagini mai puţine decât dublul numărului de pagini a cărţii lui Tudor. Cu câte pagini are de citit mai mult Diana?

21. La o florărie s-au vândut garoafe galbene și roșii, în total 126 de fire. Știind că au fost vândute de două ori și jumătate mai multe garoafe galbene decât roșii, aflaţi câte garoafe de fiecare fel s-au vândut.

22. Dana, Maria și Andrei au împreună 200 de lei. Câţi lei are fiecare copil dacă Dana și Maria au împreună 116 de lei, iar Maria și Andrei 148 de lei?

23. Oana a cumpărat pentru fratele ei 2 caiete a câte 6 lei și 3 creioane mecanice a câte 8 lei și o ciocolată cu 6 lei. Ce rest a primit de la 50 de lei?

24. La o fermă s-au plantat meri, caiși și vișini. Știind că 5096 nu sunt peri, 4376 nu sunt meri, iar 5592 nu sunt vișini, aflaţi câţi pomi fructiferi sunt de fiecare fel.

25. Matei are 57 de lei. De ziua lui primește de la părinţi 50 de lei și de la bunici 75 de lei. Câţi lei îi raman după ce își cumpără o mașinuţă de 42 de lei și o jucărie de pluș de trei ori mai ieftină?

26. Scăzând din 75 dublul numărului 9, se obţine un număr cu 17 mai mare decât *a*. Cât trebuie adăugat la numărul *a* pentru a obţine 90?

27. Bunicul are în livadă 148 de peri, cu 68 mai mulţi meri și un număr de caiși egal cu totalul de peri și meri. Câţi vișini trebuie să planteze bunicul pentru a avea 900 de pomi fructiferi?

28. Un penar costă cu 24 de lei mai mult decât două stilouri de același fel. Cât costă două penare și trei stilouri, știind că un stilou costă 108 lei?

29. O carte are 150 de pagini. Mara citește în prima zi 12 pagini, iar în următoarele 5 zile tot cu câte 3 pagini mai multe decât în ziua precedentă. Câte pagini îi mai rămân de citit?

30. O carte costă cât jumătate din preţul unui stilou. Stiloul costă cu 14 lei mai mult decât un penar. Penarul și stiloul costă împreună 98 de lei. Cât costă fiecare obiect?

31. Mama a cumpărat Mariei o fustă, o bluză și o pereche de pantaloni. Preţul rochiei a fost 145 lei, al bluzei cu 47 de lei mai puţin decât cel al rochiei, iar pantalonii cât jumătate din totalul preţului rochiei și al bluzei. Câţi lei a plătit mama în total?
32. Vlad are 6 cutii a câte 7 biscuiţi iar Andrei 8 cutii a câte 6 biscuiţi. Câţi biscuiţi trebuie să-i dea Andrei lui Vlad pentru a avea același număr de biscuiţi?
33. Pentru dansurile populare, elevii unei clase s-au grupat câte 10 pe 3 rânduri. Pentru dansurile moderne trebuie să se așeze pe 6 rânduri. Câţi elevi vor fi pe fiecare rând la dansurile moderne?
34. Bunica a cules 9 lădiţe a câte 4 kg de cireșe și 4 lădiţe a câte 6 kg de vișine. Ea pune cireșele în plase de câte 2 kg, iar vișinele în plase de 3 kg. De câte plase are nevoie bunica?
35. Sebastian are 48 de lei. Cu o șesime din ei cumpără o carte, iar cu a patra parte din banii rămași un stilou. Câţi bani îi ramân lui Sebastian?
36. Peste 3 ani, trei fraţi vor avea împreună 30 de ani. Acum cel mai mare dintre fraţi este cu 3 ani mai în vârstă decât ceilalţi doi care sunt gemeni. Câţi ani are acum fiecare ditnre fraţi?
37. Peste 2 ani Oana va avea vârsta pe care a avut-o cu un an în urmă Alin. Câţi ani vor avea împreună peste 2 ani, dacă Alin va avea anul viitor 11 ani?
38. Doi copii au un număr de nuci. După ce unul din copii mănâncă 7 nuci, iar cel de al doilea cu 4 mai multe, ramân cu 3 nuci mai puţine decâ au mâncat împreună. Câte nuci au avut?
39. În luna ianuarie mama a consumat câte 2 căni de ceai și o cană de cafea pe zi, în care a pus câte 2 cuburi, respectiv 1 cub de zahăr. Mama a avut o cutie cu 640 de cuburi de zahăr. Câte cuburi îi rămân?

40. Cu 240 de lei mama a cumpărat 6 cămăși anul trecut. Între timp cămășile s-au scumpit cu câte 20 de lei. Câte cămăși poate cumpăra acum mama cu aceeași sumă de bani?

41. La petrecerea de Crăciun pe fiecare din cele 15 mese a fost așezat câte un sfeșnic, 6 dintre sfeșnice au câte 5 braţe, iar celelalte au câte 3 braţe. Câte lumânări au fost necesare pentru toate braţele acestor sfeșnice?
a) 40; b) 50; c) 57; d) 60 ; e) 75.
(Concursul *Cangurul*, 2012)

42. Află un număr știind că dacă la diferenţa numerelor 897 și 789 adunăm dublul numărului 156 obţinem un număr care scăzut din numărul cerut dă 623.

43. La o cofetărie s-au adus 118 de ciocolate albe, negre și cu lapte. Știind că după ce s-au vândut 6 ciocolate albe, 7 ciocolate negre și 10 ciocolate cu lapte a ramas aceeași cantitate de ciocolate albe și negre, iar cu lapte de două ori mai puţine decât cele albe, să se afle câte ciocolate de fiecare fel au fost aduse.

44. O cutie mare care conţine 100 de pliculeţe de ceai costă 9 euro, iar o cutie mică care conţine 50 de pliculeţe de ceai costă 5 euro. Ce sumă economisesc pentru fiecare pliculeţ de ceai, dacă voi cumpăra o cutie mare în loc de două cutii mici?
a) 1 euro; b) 10 cenţi; c) 1 cent; d) 50 cenţi; e) 5 cenţi.
(Concursul *Cangurul*, 2011)

45. La o fabrică s-a adus 500 kg de prune pentru prelucrare. Din 4 kg de prune se fac 2 kg de gem, sau 1 kg de magiun. În prima zi au fost obţinute 85 kg de gem și 35 kg de magiun. Câte kg de prune au mai rămas pentru prelucrare?

46. La un magazin s-au adus 3 lăzi cu mere, fiecare cântărind 35 kg. Știind că lada goală cântărește cât o șeptime din masa unei lăzi pline, aflaţi câte kg de mere s-au adus.

47. La un supermarket un pachet promoţional format din două cutii de cereale și un bol cadou costă 30 de lei. Cristina a căutat în

supermarket și a găsit același tip de cereale dar la o cantitate pe jumătate ca cea din promoţie la preţul de 8 lei. Câţi lei economisește Cristina dacă va cumpăra pachetul promoţional?

48. La un chioșc s-au adus 510 kg de zahăr și orez. După ce din întreaga cantitate s-au vândut 14 kg de zahăr și 26 kg de orez, au rămas de 4 ori mai multe kg de orez decât de zahăr. Aflaţi câte kg de orez au fost aduse la început.

49. O cutie cu cereale pentru micul dejun cântărește 450 g. După ce Mircea a consumat jumătate din cereale, observă că, cutia cântărește 260 g. Câte grame de cereale au fost iniţial în cutie și cât cântărește cutia goală?

50. Ana, Barbu și Carla colecţionează timbre. Dacă Ana și Barbu au împreună 205 timbre, Barbu și Carla au 224 timbre, iar Ana și Carla au împreună 119 timbre. Câte timbre are fiecare copil?

51. Trei fraţi citesc trei cărţi identice. Cel mai mare frate a terminat de citit cartea în timp ce fratele mijlociu a citit jumătate, iar cel mic un sfert de carte. Au constatat că împreună au citit 196 de pagini. Câte pagini avea cartea?

52. Tatăl are 61 de ani, iar fiul său 29 de ani. Cu câţi ani în urmă tatăl a fost de 9 ori mai în vârstă decât fiul?

53. Un triunghi are perimetrul 81 cm și două laturi de lungimi numere naturale consecutive, iar a treia latură are lungimea cât dublul sumei lungimilor celorlalte două laturi. Ce lungime va avea fiecare latură?

54. Într-o cutie sunt bile albe, roșii și negre cu care putem face trei grămezi a 37 de bile. Amestecând doar bilele albe și roșii se pot forma două grămezi a câte 28 de bile. Știind că bilele negre sunt cu 14 mai multe decât cele roșii aflaţi câte bile de fiecare fel sunt.

55. Află două numere știind că dacă la primul adaugăm 72 obţinem al doilea număr, iar dacă la al doilea adăugăm 38 obţinem dublul primului număr.

56. Din borcanele de gem mama dă fiicei sale un sfert, iar restul le așază în mod egal câte 9 pe 8 rafturi. Câte borcane de gem a făcut mama?
57. Într-o grădină erau plantate 33 de lalele și trandafiri. Grădinarul din dorinţa de a avea mai multe flori a dublat cantitatea de lalele și a triplat cantitatea de trandafiri, având acum în grădină 87 de flori. Câte lalele și câţi trandafiri au fost iniţial în grădină?
58. Maria are o cutie cu 289 de mărgele roșii, galbene și albastre. După ce a ales cele 117 mărgelele roșii a observat că au mai rămas cu 30 de mărgele galbene mai multe decât cele albastre. Câte mărgele de fiecare culoare sunt?
59. Care este diferenţa dintre suma succesorului și predecesorului numărului 296 faţă de sfertul acestuia?
60. La un magazin s-au adus 73 de sticle de apă de 2 l și 54 de bidoane de 5 l. Știind că s-au vândut 398 l de apă și au rămas nevândute 2 bidoane de apă, aflaţi câte sticle de 2 l au rămas pe stoc.

4.4. Probleme cu cerinţe metodice

În această parte a lucrării am inclus cerinţe privind demersul didactic în rezolvarea de probleme, compuneri de probleme cu anumite cerinţe precizate, reformularea enunţului din limbaj matematic în limbaj cotidian sau invers, verificarea soluției problemei, scrierea exercițiului de rezolvare, modificarea datelor şi/sau a concluziei/ cerințelor, generalizări etc.

✐ **Probleme propuse:**

1. Pe baza problemei următoare: “*Mama a cumpărat pentru fiecare din cei patru copii ai săi câte 2 mere și 3 mandarine. Câte fructe a cumpărat mama în total?*” ce proprietate matematică vor descoperi elevii? Precizaţi demersul didactic corespunzător.

2. Pe baza problemei următoare: „*Mama a cumpărat pentru fiecare din cei patru copii ai săi câte 5 mandarine, din care fiecare copil mănâncă 3. Câte fructe au rămas?”* ce proprietate matematică vor descoperi elevii? Precizaţi demersul didactic.
3. Compuneţi o problemă prin care elevii descoperă asociativitatea adunării şi precizaţi demersul didactic.
4. Compuneţi o problemă prin care elevii descoperă asociativitatea înmulţirii şi precizaţi demersul didactic.
5. Compuneţi o problemă prin care elevii descoperă distributivitatea înmulţirii faţă de adunare şi precizaţi demersul didactic.
6. Compuneţi o problemă prin care elevii descoperă distributivitatea înmulţirii faţă de scădere şi precizaţi demersul didactic.
7. Compuneţi o problemă care se rezolvă prin exerciţiul $(b + c) : a$ şi rezolvaţi-o aritmetic în două moduri. Ce proprietate matematică se descoperă prin acest demers didactic?
8. Compuneţi o problemă care se rezolvă prin exerciţiul $(b - c) : a$ şi rezolvaţi-o aritmetic în două moduri. Ce proprietate matematică se descoperă prin acest demers didactic?
9. Compuneţi o problemă pentru a arăta că împărţirea nu e distributivă faţă de adunare la stânga şi precizaţi demersul didactic. Exemplu: $42 : (14 + 7) \neq 42 : 14 + 42 : 7$
10. Compuneţi o problemă pentru a arăta că împărţirea nu e distributivă faţă de scădere la stânga şi precizaţi demersul didactic. Exemplu: $42 : (14 - 7) \neq 42 : 14 - 42 : 7$
11. *La un magazin s-au adus 924 kg de mere. În prima zi s-a vândut un sfert din cantitate, a doua zi jumătate din cantitate.*
    a) Pentru următoarea cerinţă: *Câte kg de mere au rămas nevândute?* rezolvaţi aritmetic problema și scrieţi exerciţiul de rezolvare.
    b) Formulaţi o altă întrebare pentru problemă care să se rezolve prin două împărţiri și o scădere și apoi rezolvaţi.

12. *La un magazin s-a adus în prima zi 3 cutii a 24 l de lapte, iar a doua zi 4 cutii a 12 l de lapte.*
    a) Pentru următoarea cerinţă: *Câţi l de lapte au fost aduși în total?* *r*ezolvaţi aritmetic problema și scrieţi exerciţiul de rezolvare.
    b) Formulaţi o altă întrebare pentru problemă care să se rezolve printr-o diferenţă de produse și apoi rezolvaţi.

13. *La o grădiniţă s-au adus 924 de ouă. În prima zi s-au consumat o treime din ele iar a doua zi jumătate din ouăle consumate în prima zi.*
    a) Pentru următoarea cerinţă: *Câte ouă s-au consumat în total?* rezolvaţi aritmetic problema și scrieţi exerciţiul de rezolvare.
    b) Formulaţi o altă întrebare pentru problemă care să se rezolve prin două împărţiri și o scădere și apoi rezolvaţi.

14. *La o grădiniţă s-au adus 3 cutii a 12 kg de portocale și o cantitate dublă de mere.*
    a) Pentru următoarea cerinţă: *Câte kg de fructe s-au adus în total?* rezolvaţi aritmetic problema și scrieţi exerciţiul de rezolvare.
    b) Formulaţi o altă întrebare pentru problemă care să se rezolve prin două înmulţiri și o scădere și apoi rezolvaţi.

15. Compuneţi o problemă care se rezolvă prin exerciţiul: $12+(12-4)+(12\times 3)$ şi rezolvaţi-o aritmetic.

16. Compuneţi o problemă care se rezolvă prin exerciţiul: $2\times[12+(12:4)]-(12:3)$ şi rezolvaţi-o aritmetic.

17. Compuneţi o problemă care se rezolvă prin exerciţiul: $120-(120:2)-[(120:2):2]-\{[(120:2):2]:2\}$ şi rezolvaţi-o aritmetic.

18. Compuneţi o problemă care se rezolvă prin exerciţiul: $a + (a - 5) : 2 + 3 \times (a + 5)$ şi rezolvaţi-o aritmetic.

19. Scrieţi un exerciţiu cu *două adunări și o scădere și cu o paranteză rotundă*, apoi compuneţi o problemă a cărei rezolvare conduce la exerciţiul respectiv. Rezolvaţi aritmetic problema.

20. Scrieţi un exerciţiu cu *două adunări, o scădere și o înmulţire cu o paranteză rotundă și una dreaptă*, apoi compuneţi o problemă a cărei rezolvare conduce la exerciţiul respectiv. Rezolvaţi aritmetic problema.

21. Rezolvaţi problema aritmetic, denumiţi metoda de rezolvare şi apoi reformulaţi în limbaj cotidian următoarea problemă: *Suma a două numere este 20, iar diferenţa lor 4. Aflaţi numerele.*

22. Completaţi elementele lipsă din problema *Pentru o minge de tenis și una de baschet s-au plătit ... lei, iar mingea de baschet este cu... mai ... decât cea de tenis. Aflaţi ...?* Apoi rezolvaţi-o și numiţi metoda de rezolvare. În ce categorie de probleme tip poate fi încadrată aceasta?

23. Rezolvaţi problema aritmetic, denumiţi metoda de rezolvare şi apoi formulaţi în limbaj cotidian o problemă echivalentă: *Diferenţa a două numere este 4, iar raportul lor 5/3. Aflaţi numerele.*

24. Formulaţi în limbaj cotidian o problemă cu două necunoscute care să se rezolve prin metoda figurativă la care se cunoaște *diferenţa, câtul și restul împărţirii numărului mai mare la numărul mai mic*.

25. Completaţi elementele lipsă din problema *Într-o cutie sunt .... bile roșii, albe și galbene. Știind că bilele albe sunt de ... ori mai puţine decât cele roșii, iar cele roșii sunt cu ... mai ... decât jumătate din cele galbene, aflaţi ...* Apoi rezolvaţi-o și numiţi metoda de rezolvare.

26. Se dă următoarea problemă: *Într-un parc sunt 1029 fire de lalele albe, galbene și roşii. Ştiind că cele roşii sunt de două ori mai multe decât cele galbene, iar cele galbene cu 11 mai multe decât cele albe, aflaţi câte fire de lalele de fiecare fel sunt.*

    a) Rezolvaţi problema în două moduri și scrieţi exerciţiul de rezolvare pentru aflarea numărului de garoafe albe și galbene.

    b) Reformulaţi problema în limbaj matematic.

27. Compuneţi o problemă care să se rezolve prin metoda figurativă cu trei necunoscute în care se cunoaște totalul valorilor necunoscutelor, o relaţie de tipul „cu atât mai mult” între două necunoscute și o relaţie de tipul „de atâtea ori mai puţin” pentru alte două necunoscute. Formulaţi problema în limbaj cotidian.

28. Compuneţi o problemă care să se rezolve prin metoda figurativă cu trei necunoscute în care se cunoaște totalul valorilor necunoscutelor, o relaţie de tipul „cu atât mai puţin” între două necunoscute și o relaţie de tipul „de atâtea ori mai mult” pentru alte două necunoscute. Formulaţi problema în limbaj cotidian.

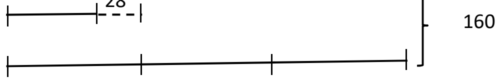
29. Completaţi elementele lipsă din problema: *În doi saci sunt ... kg de ... După ce din primul sac s-au consumat ... kg de ... în al doilea se află o cantitate de... ori mai mare decât în primul. Câte ...?* Apoi rezolvaţi-o și numiţi metoda de rezolvare. În ce categorie de probleme tip poate fi încadrată aceasta?

30. Completaţi elementele lipsă din problema: *În doi saci sunt ... kg de ... După ce din primul s-au mutat ... kg de ... în cel de al doilea, în acesta se află o cantitate de... ori mai mare decât în primul. Câte ...?* Apoi rezolvaţi-o și numiţi metoda de rezolvare.

31. Compuneţi o problemă care să se rezolve prin metoda figurativă cu două necunoscute cu transfer de cantităţi de la o necunoscută la alta. Formulaţi problema în limbaj cotidian.

32. Compuneţi și rezolvaţi aritmetic prin metoda figurativă o problemă cu trei necunoscute la care se cunosc valorile sumelor necunoscutelor luate două câte două.

33. Compuneţi o problemă în limbaj cotidian care să se rezolve prin metoda figurativă pe baza următorului model grafic:



34. Completaţi elementele lipsă din problema următoare și puneţi întrebarea*: Mama a cumpărat într-o zi de la piaţă ... kg de mere și ... kg de pere plătind pentru ele... lei. A doua zi a cumpărat ... kg de mere și ... kg de pere plătind de această dată ... lei.* Apoi rezolvaţi-o și numiţi metoda de rezolvare.

35. Formulaţi o problemă, care să se rezolve prin metoda comparaţiei și care schematic este scrisă astfel:

    a creioane ... b pixuri ... m lei
    c creioane ... d pixuri ... n lei

    Apoi rezolvaţi problema.

36. Formulaţi o problemă, care să se rezolve prin metoda comparaţiei și care schematic este scrisă astfel:

    a creioane ... b pixuri ... m lei
    1 pix = c creioane

    Apoi rezolvaţi problema.

37. Formulaţi o problemă care să se rezolve prin metoda comparaţiei, care are ca rezultat preţul unei fuste și preţul unei bluze.

38. Compuneţi o problemă care să se rezolve prin metoda falsei ipoteze în care rezultatele să fie: 28 de papagali și 14 hamsteri.

39. Completaţi elementele lipsă din problema: *La un concurs de pescuit pentu fiecare pește prins peste 1 kg se acordă ... lei, iar pentru fiecare pește prins sub 1 kg se plătește o taxă de ... lei. Pentru ... pești prinși un bărbat a câștigat ... lei. Aflaţi ...?*, apoi rezolvaţi-o și numiţi metoda de rezolvare.

40. Completaţi elementele lipsă din problema: *Ana și Maria au împreună ... bancnote. Ana are doar bancnote de ... lei, iar Maria doar bancnote de ... lei, în total având .... lei. Aflaţi ...?, a*poi rezolvaţi-o și numiţi metoda de rezolvare.

41. Formulaţi o problemă, care să se rezolve prin metoda reducerii la unitate și care schematic este scrisă astfel:

    a creioane ... m lei
    b creioane ... ? lei

    Apoi rezolvaţi problema.

42. Formulaţi o problemă, care să se rezolve prin metoda reducerii la unitate și care schematic este scrisă astfel:

    a creioane ... b pixuri ... m lei și ... bani
    c creioane ... d pixuri ... ? lei și ? bani

    Apoi rezolvaţi problema.

43. Compuneţi o problemă care să se rezolve prin metoda reducerii la unitate cu următoarele date: 4 robinete, 5 ore, 20 l/min.

44. Completaţi elementele lipsă din problema: *Mama a pus într-un bol bomboane. Maria ajungând prima acasă ia ... din ele și încă ... bomboane. Fratele ei Dan ia ... din cele rămase și încă ... bomboane. Când a ajuns Mihai acasă în bol mai erau ... bomboane. Aflaţi...* . Apoi rezolvaţi-o și numiţi metoda de rezolvare.

45. Compuneţi o problemă care se rezolvă prin metoda mersului invers cu două tăieri de tipul: *un sfert și încă ..., respectiv o treime din rest și încă....*

46. Compuneţi o problemă care să se rezolve prin metoda mersului invers după următorul exerciţiu: $(52 - a : 2) - 12 = 33$.

47. Compuneţi o problemă cu enunţ cotidian care să conducă la aflarea unei necunoscute prin punere în ecuaţie prin metoda mersului invers.

48. Compuneţi o problemă având conţinut geometric cu referire la un triunghi, în care se dă perimetrul acestuia și încă două relaţii privind laturile acestuia.

49. Compuneţi o problemă având conţinut geometric cu referire la un dreptunghi, în care se dă perimetrul acestuia și încă o relaţie între lungime și lăţime.

50. Completaţi elementele lipsă din problema: *Un dreptunghi are perimetrul cu... faţă de perimetrul pătratului. Știind că latura pătratului este ... cm, lungimea dreptunghiului este ... faţă de lăţimea sa, să se afle...* Apoi rezolvaţi problema.

51. Compuneţi o problemă având conţinut geometric cu referire la un dreptunghi și un pătrat despre care se știe o relaţie de legătură între perimetre, în care se dă perimetrul pătratului și încă o relaţie între lungimea și lăţimea dreptunghiului.
52. Compuneţi o problemă în care elevii să exerseze noţiunile de interior şi exterior al unei figuri geometrice.
53. Compuneţi trei itemi de tipuri diferiţi pentru măsurarea lungimilor la clasa a IV-a. Apoi rezolvaţi-i.
54. Proiectaţi un demers didactic (activitate practică) prin care elevii să descopere egalitatea: $1\ dm^3 = 1\ l$.
55. Compuneţi o problemă de tip item structurat pentru adunarea numerelor naturale în intervalul 0-31. Apoi rezolvaţi problema.
56. Compuneţi trei itemi de tipuri diferiţi pentru adunarea numerelor naturale în intervalul 0-31. Apoi rezolvaţi-i.
57. Compuneţi o problemă de tip item structurat pentru înmulţirea numerelor naturale în intervalul 0-100. Apoi rezolvaţi problema.
58. Compuneţi trei itemi de tipuri diferiţi pentru înmulţirea numerelor naturale în intervalul 0-100. Apoi rezolvaţi-i.
59. Compuneţi câte o problemă de tip item structurat pentru ordinea efectuării operaţiilor la clasele a III-a și respectiv a IV-a. Apoi rezolvaţi problemele.
60. Compuneţi trei itemi de tipuri diferiţi pentru pentru ordinea efectuării operaţiilor la clasa a IV-a. Apoi rezolvaţi-i.
61. Compuneţi două probleme de tip item structurat cu fracţii una pentru clasa a III-a și cealaltă pentru clasa a IV-a. Apoi rezolvaţi problemele.
62. Compuneţi trei itemi de tipuri diferiţi cu fracţii la clasa a IV-a. Apoi rezolvaţi-i.

Bibliografie

Bălăucă, A., Negrescu, A., Gându, G., Chrilă, C., Pârlog, L., Gloambeș, L., (2008), *Matematică. Teme pentru activităţi opţionale*, ediţia a II-a, Editura Taida, Iași.

Berar, I., Albu, M. (2004), *Investigarea aptitudinilor matematice la şcolarii mici (8-11 ani)*. În: M. Albu, C. Ţăran (coord.), Cercetări şi aplicaţii în psihologie, Vol. 2, Timişoara, Editura Augusta şi Artpress, pag. 21-45.

Bobancu, V., (1996), *Caleidoscop matematic*, Editura Petrion, București.

Cherata, V., Voicila, J., Mîndruleanu, L., (1994), *Metode și tehnici de rezolvare a problemelor de aritmetică, clasele I-VI*, Editura Sibila, Craiova.

Dăncilă, E., Dăncilă, I., (2008), *Matematică pentru învingători, clasele III-IV*, Editura Erc Press, București.

Dăncilă, E., Dăncilă, I., (2008), *Matematică pentru învingători, clasele V-VI*, Editura Erc Press, București.

Dumitru, A., (coord.), (2013), *Concursul „Fii InteligenT la matematică": clasa a III-a*, Editura Nomina, Pitești.

Enescu, B., Ghioca, A., Oprea, A., Șerbănescu, D. (coord.), (2002), *Capacitate 2002*, Editura Gil, Zalău.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), (2013), *Grade 4 Released Mathematics Items TIMSS 2011,* on line la: *https://nces.ed.gov/timss/pdf/TIMSS2011_G4_ Math.pdf*

Magdaş, I., (2017), *Syllabus Metodica predării matematicii* (în format electronic), Centrul de Formare Continuă, Învăţământ la Distanţă şi cu Frecvenţă Redusă, Specializarea: Pedagogia Învăţământului Primar şi Preşcolar, Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca.

Magdaş, I., (2014), *Didactica matematicii pentru învăţământul primar şi preşcolar- actualitate şi perspective*, ediţia a II-a revizuită, Editura Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca.

Magdaş, I., (2013), *Greşeli tipice în predarea-învăţarea elementelor de geometrie în învăţământul preşcolar şi primar*, Volumul: Probleme actuale ale Didacticii Ştiinţelor Reale, Conferinţa ştiinţifico-didactică naţională cu participare internaţională consacrată aniversării a 80-a de la naşterea profesorului universitar Andrei Hariton, Chişinău, 4-6 oct. 2013, p. 53-61.

Magdaş, I., (2012), *Probleme de estimare în învăţământul primar*, Volumul: Perspective operaţionale în educaţia preuniversitară din România, Editura Grinta, Bistriţa, pp.74-78.

Magdaş, I., (2011), *Etapele rezolvării metodice a problemelor de aritmetică*, Volumul: Înnoirea educaţiei - Studii de pedagogie şi didactică aplicată, Editura Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, pp. 270-275.

Magdaş, I., (2011), *Metoda problematizării la matematică în învăţământul primar*, Volumul: Cercetări și aplicaţii în didactică, Ed. Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, pp.137-142

Magdaş, I., (2010), *Respectarea caracterului ştiinţific al matematicii în învăţamântul primar şi preşcolar*, Volumul: Tradiţii, valori şi perspective în ştiinţele educaţiei, Editura. Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, pp. 301-305.

Magdaş, I., (2009), *Metoda modelării la matematică în învăţământul primar*, Volumul: Tradiţii, valori şi perspective în ştiinţele educaţiei, Editura Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, pp. 330- 333.

Magdaş, I., (2008), *De la metode algoritmice de rezolvare a problemelor de matematică spre dezvoltarea creativităţii*, Volumul: Tradiţii, valori şi perspective în ştiinţele educaţiei, Editura Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, pp. 386-389.

Magdaş, I., (2007), *Dezvoltarea gândirii matematice a elevilor din învăţământul primar la toate nivelele taxonomice prin rezolvare de probleme*, în volumul: Dezvoltarea competenţelor didactice şi de cercetare în ştiintele naturii, Editor. L., Ciascai Editura Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, pp. 110-115.

MEN, Centrul Naţional de Evaluare și Examinare, *Evaluare naţională la finalul claselor a II-a și a IV-a, Matematică.*

MEN, (2013), *Programa școlară pentru disciplina Matematică și Explorarea Mediului*, clasa pregătitoare, clasa I și clasa a II-a, București.

MEN, (2014), *Programa școlară pentru disciplina Matematică,* clasele a III-a – a IV-a, București.

Mogoș, M., (2014), *Matematică, clasa a IV-a: competenţe și performanţă*, Editura Paralela 45, Pitești.

Pârâială, V., Pârâială, D., Pârâială, C.-G., (2005 / 2009), *Matematică; Culegere-auxiliar al manualelor. Teste de evaluare pentru conţinut obligatoriu, clasa a III-a/ a IV-a*, Editura Euristica, Iași.

Roşu, M., (2006), *Didactica matematicii în învăţământul primar*, Proiectul pentru învăţământul rural, Ministerul Educaţiei și Cercetării.

Societatea de Științe Matematice din România, Colecţia *Gazeta Matematică*

Vălcan, D., (2005), *Metodologia rezolvării problemelor de aritmetică*, Editura Casa cărţii de ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

Zanoschi, A., Ilie, G. (coord.), (2016), *Probleme de aritmetică pentru performanţă: metode de rezolvare, teste și subiecte de concurs, clasele III-IV*, ediţia a V-a, Editura Paralela 45, Pitești.

*** Concursul internaţional de matematică aplicată *Cangurul*

*** Concursul de matematică *Evaluarea în educaţie*

*** Concursul de matematică *Lumina Math*

PRESA UNIVERSITARĂ
ISBN: 978-606-37-0280-8